Semme
11
1872

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

M. THÉODORE OLIVIER,

Ancien élève de l'École polytechnique et ancien officier d'artillerie; Docteur ès sciences de la Faculté de Paris;
Ancien professeur-adjoint de l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz;
Ancien répétiteur à l'École polytechnique; Professeur de géométrie descriptive au Conservatoire des arts et métiers;
Professeur-fondateur de l'École centrale des arts et manufactures;
Membre honoraire de la Société philomathique de Paris et du comité des arts mécaniques de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale;
Membre étranger de deux Académies royales des sciences et des sciences militaires de Stockholm;
Membre correspondant de la Société royale des sciences de Liége et de la Société d'agriculture et arts utiles de Lyon, des Académies des sciences de Metz, Dijon et Lyon,
Officier de la légion d'honneur et chevalier de l'Ordre royal de l'Étoile polaire de Suède.

PREMIÈRE PARTIE

DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE R.F. IMPRIMÉS

TROISIÈME ÉDITION

(TEXTE)

REVUE ET ANNOTÉE

PAR

M. EUGÈNE ROUCHÉ

Professeur de Géométrie descriptive à l'École centrale, Répétiteur à l'École polytechnique, etc.

L'introduction de cet ouvrage dans les établissements d'instruction publique est autorisé par décision de Son Excellence Monsieur le Ministre de l'Instruction publique, en date du 27 juillet 1863.

PARIS

LIBRAIRIE D'ARCHITECTURE

DUNOD, ÉDITEUR,

Successeur de Victor Dalmont (précédemment Carilian-Gœury et Victor Dalmont),

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

(Quai des Augustins, 49

1872

OUVRAGES SUR LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PUBLIÉS

Par M. Théodore OLIVIER.

I. COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PREMIÈRE PARTIE. — Du point, de la droite et du plan: in-4° de 160 pages avec un atlas de 43 pl. in-4°, 3e édition. Prix 10 fr.

DEUXIÈME PARTIE. — Des courbes et des surfaces, et en particulier des courbes et des surfaces du second ordre: in-4° de 400 pages avec un atlas de 52 pl. in-4°, 3e édition. Prix 12 fr. 50. Prix des deux parties ensemble 22 fr.

II. ADDITIONS AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE: Démonstration nouvelle des propriétés principales des sections coniques; in-4° de 100 pages avec un atlas de 15 pl. in-4°. Prix 4 fr.

III. DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE: in-4° de 500 pages avec un atlas de 27 pl. in-4°. Prix 18 fr.

IV. COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE: in-4° de 472 pages avec un atlas de 58 pl. in-folio. Prix 18 fr.

V. APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE: 1° aux ombres; 2° à la perspective; 3° à la gnomonique; 4° aux engrenages: in-4° de 415 pages avec un atlas de 58 pl. in-folio. Prix 25 fr.

VI. MÉMOIRES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE: in-4° de 310 pages avec un atlas de 12 pl. in-folio. Prix 18 fr.

ABBEVILLE. — IMP. BRIEZ, C. PAILLART ET RETAUX

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION (1843).

J'ai divisé ce cours de géométrie descriptive en deux parties: dans la première, je donne tout ce qui est relatif au point, à la droite et au plan ; dans la seconde, je m'occupe des courbes et des surfaces, en général, et en particulier, des sections coniques et des surfaces du second ordre.

Je n'ai point voulu écrire un traité de géométrie descriptive, car alors j'aurais été obligé de donner un résumé de tout ce qui a été fait, et de classer avec ordre toutes les recherches dues aux divers savants (1) qui se sont occupés de la science, si vaste et si utile par ses nombreuses applications, à laquelle Monge a donné le nom de *géométrie descriptive*. En écrivant un cours, j'ai pu me borner à exposer mes idées et mes recherches sur cette science, tout en donnant ce qui est indispensable à ceux qui l'étudient dans le but de devenir *ingénieurs*.

Monge a souvent répété que, lorsqu'on savait les divers problèmes relatifs au point, à la droite et au plan, et dont l'ensemble forme ce que l'on appelle encore et assez improprement les *préliminaires de la géométrie descriptive*, on savait la géométrie descriptive. On n'a pas fait assez attention à cette manière de voir de *Monge*, au sujet de la géométrie nouvelle dont le premier il a formé un corps de doctrine, et à laquelle il a donné un nom, le nom de *géométrie descriptive*, qui a été souvent critiqué, faute de comprendre tout ce qu'il signifiait dans la pensée du savant fondateur de l'École polytechnique.

Il n'existe, à vrai dire, qu'une géométrie, et qui a pour but de reconnaître les propriétés de l'espace figuré. Ces propriétés sont de deux espèces, savoir : les propriétés de *relation* de *position*, et les propriétés de *relation métrique* ; mais l'on peut employer des méthodes diverses pour arriver à la découverte des unes et des autres. Chaque méthode particulière a reçu, par extension, le nom de *géométrie*. Ainsi on disait la géométrie de Descartes, et l'on a dit la géométrie de Monge : Descartes

(1) Je me propose d'écrire un nouvel ouvrage qui aura pour titre : *De l'Enseignement de la Géométrie descriptive* : c'est alors que j'exposerai les travaux des divers savants qui, après *Monge*, ont écrit sur cette science ; et alors je tâcherai de faire connaître, aussi complétement qu'il me sera possible, le progrès que chacun d'eux a fait faire à la *Géométrie descriptive*.

employait *l'analyse* à la recherche des vérités géomé riques, Monge a employé la *méthode des projections* à la recherche des propriétés dont jouissent les *formes géométriques*. Et comme les *surfaces* qui limitent et terminent les corps sont composées de *lignes*, et que les *lignes* sont formées de *points*, et qu'une foule de corps sont terminés par *des faces planes*, et que d'ailleurs le plan joue un grand rôle lorque l'on examine les surfaces, soit que l'on considère un plan comme *tangent* ou *sécant* par rapport à la surface particulière dont on discute les propriétés, soit qu'on le considère comme *tangent* ou *normal* ou *osculateur* en certain point de certaine courbe tracée sur la surface particulière, il est bien évident dès lors que, lorsqu'on saura représenter un point, une droite et un plan par la méthode des projections, et résoudre, par la méthode des projections, les divers problèmes que l'on peut proposer sur le point, la droite et le plan, on saura la *géométrie descriptive* ; en ce sens que l'on saura tout ce qu'il faut pour appliquer la méthode des projections à la recherche des vérités géométriques qu'il lui est permis de démontrer touchant l'espace figuré ; car, il faut bien le reconnaître, chaque méthode est plus spécialement applicable à un genre particulier de questions. C'est ainsi que *l'analyse* s'applique à la recherche des propriétés *de relation métrique*, et que la *géométrie descriptive* s'applique à la recherche des propriétés de *relation de position*.

La géométrie descriptive doit être considérée comme un *art* et comme une *science*. Pendant longtemps et depuis très-longtemps, *l'art des projections* était connu des *stéréomètres*, et ainsi des *appareilleurs* pour la coupe des pierres et des *charpentiers* ; mais c'est vraiment depuis *Monge* que la géométrie descriptive a été reconnue être une *science*, et c'est aux travaux de Monge qu'on le doit ; car c'est lui qui le premier a démontré que, dans ce que l'on appelait *l'art des projections*, résidait réellement une *méthode scientifique* qui permettait de rechercher et de démontrer certaines *vérités géométriques*, et ainsi toutes celles relatives à *la forme* de l'espace figuré. Et, à ce sujet, nous devons rappeler que Monge a souvent dit : « Si je refaisais mon ouvrage qui a pour titre *de l'analyse appliquée à la géométrie* (ouvrage dans lequel il s'est servi de *l'analyse infinitésimale* pour rechercher et démontrer un si grand nombre de propriétés inconnues jusqu'à lui et dont jouissent les courbes et les surfaces), je l'écrirais en deux colonnes : dans la première, je donnerais les démonstrations par *l'analyse*; dans la seconde, je donnerais les démonstrations par la *géométrie descriptive*, en d'autres termes, par la méthode des projections ; et l'on serait peut-être, ajoutait-il, bien étonné, en lisant cet ouvrage, de voir que l'avantageserait presque toujours du côté de la seconde colonne, pour la clartédu raisonnement, la simplicité de la démonstration, et la facilité de l'application des *théorèmes* trouvés aux divers *travaux des ingénieurs*. »

Or il faut savoir que Mongeavait d'abord recherché et démontré par la géométrie descriptive presque tout ce qu'il a donné dans *son analyse appliquée à la géométrie.* Mais comme il lui était défendu de faire connaître ses méthodes géométriques, ttendu qu'il était attaché comme professeur à l'école du génie de *Mézières*, il fut obligé de traduire en *analyse* les résultats auxquels il était parvenu directement par la méthode des projections. Et, chose digne de remarque, c'est peut-être à cette nécessité de ne pas présenter ses recherches sous leur première forme, que nous devons les démontrations si admirables données par *Monge* au moyen *du calcul aux différences partielles*, et qui ont fait faire un si grand pas à l'application de *l'analyse* à la *géométrie.*

Tout le monde sait que ce ne fut qu'après la révolution de 89, après la destruction de l'École du génie de Mézières, et lors de la création de la première École normale, qui précéda la création de l'École centrale des travaux publics, qui plus tard prit le nom d'École polytechnique, que *Monge* publia son Traité de *géométrie descriptive*, dans lequel se trouvaient révélées toutes les méthodes graphiques dont l'école de *Mézières*, faisait un secret ; et cependant un ouvrage moins complet, il est vrai, avait déjà paru sur ce sujet important: Cet ouvrage avait été publié, sous le titre de *Complément de géométrie,* par *Lacroix* (que les sciences viennent de perdre), alors qu'il était professeur aux écoles d'artillerie.

Il n'est pas sans intérêt pour l'histoire des sciences de rappeler comment le *Complément de géométrie* a été écrit par Lacroix, et ce qui lui a donné naissance.

Un officier du génie vint en congé à Besançon, où était une école d'artillerie; *Lacroix* y était professeur. Cet officier laissa dans sa chambre la collection de ses *épures,* ce que l'on appelait, en termes d'école, *la gache,* et s'absenta pour quelques mois. Les officiers d'artillerie qui avaient sur le cœur quelques plaisanteries, fort innocentes sans doute, sur leur ignorance des travaux de Mézières, résolurent de s'emparer du *trésor* de l'officier du génie. Le complot fut exécuté, les *épures* enlevées furent calquées, et puis les *originaux* remis en place. Mais grand fut l'étonnement, lorsque le travail fini, on voulut se mettre à déchiffrer les *hiéroglyphes* de l'école de *Mézières :* personne n'y comprenait rien. Alors on va trouver *Lacroix*, et on lui remet tous les *calques. Lacroix* parvint à déchiffrer tout ce qui est relatif au *point, à la droite* et *au plan,* et il rédigea sur ce sujet un petit traité qu'il fit publier sous le titre de *Complément de géométrie.* Ce fut son premier ouvrage, qui plus tard devait être suivi d'un si grand nombre de traités remarquables et utiles. *Populariser* la science, et ainsi la faire descendre des hautes régions pour la rendre accessible au plus grand nombre, fut une des pensées dominantes de *Lacroix*, et l'on voit que son premier début fut, non pas seulement de *populariser* une science, mais d'arra—

cher à des mains avares une science éminemment utile à tous ceux qui s'occupent des travaux d'*ingénieurs*. *Lacroix* avait bien réfléchi avant de donner à son petit traité le titre de *complément de géométrie* ; il ne l'adopta qu'après avoir bien reconnu qu'en effet, la nouvelle méthode poussait réellement plus en avant la géométrie qui nous avait été léguée par les *anciens*, et qu'elle permettait de s'occuper avec certitude des problèmes à trois dimensions. *Monge* donna à son traité le titre de *géométrie descriptive*, parce qu'il connaissait toutes les ressources et tous les procédés de la géométrie nouvelle qu'il venait enfin d'enseigner *publiquement*. Il savait que, lorsqu'on considère un système dans l'espace, on parvient, en procédant par voie de *synthèse* et au moyen du *raisonnement géométrique*, à reconnaître les *diverses propriétés géométriques* dont jouit le système proposé; et que l'on décrit au fur et à mesure chacune de ses propriétés, en passant successivement des unes aux autres, les premières servant à reconnaître et à établir la vérité, l'exactitude des suivantes. Mais il savait aussi que l'*esprit* se fatigue par une attention trop longtemps soutenue, et qu'il est nécessaire *d'écrire* au fur et à mesure les découvertes faites, en un mot : ce que l'*esprit* voit et reconnaît être vrai, pour ne pas le surcharger et lui permettre d'ailleurs, lorsqu'il vient à s'égarer, de revenir avec certitude sur ses pas, pour reprendre sa route d'une manière plus assurée. *Monge* comprit dès lors que la géométrie nouvelle sert en même temps, et à *décrire* ce que *l'esprit* voit, et à *écrire*, et ainsi à fixer d'une manière invariable, ce que *l'esprit* a vu. C'est pour cela qu'il a donné à cette géométrie nouvelle le nom de *géométrie descriptive*. *Lacroix* et *Monge* ont toujours considéré l'un et l'autre la *géométrie descriptive*, comme une *science* dont la méthode fondamentale, celle *des projections*, était un nouveau moyen d'accroître nos connaissances géométriques, et de plus il l'ont regardée comme un *procédé graphique*, apte à écrire les *propriétés géométriques* d'un système à trois dimensions.

C'est en me conformant à cette manière d'envisager la *géométrie descriptive* que j'ai écrit ce *Cours* que je soumets au jugement des *géomètres* et des ingénieurs (1).

---

(1) Lorsque je songeai à rédiger mon Cours de Géométrie descriptive, je priai M. de Paul, mon répétiteur à l'École centrale des arts et manufactures, d'assister à mes leçons, de les rédiger et de les lithographier pour l'usage de nos élèves. M. de Paul rédigea avec soin et avec zèle la première partie (du point, de la droite et du plan) et quelques fragments de la seconde partie (des courbes et des surfaces); ce sont ces lithographies faites, sous ma direction, d'après mes leçons et quelques notes que je rédigeai à la hâte, qui m'ont servi de *bases* pour la rédaction définitive.

J'ai peu changé à la rédaction de la première partie, j'y ai fait cependant quelques additions et quelques corrections : c'est d'après les dessins de M. de Paul que les quarante-deux planches de la première partie ont été gravées.

J'ai écrit en son entier la seconde partie, en y faisant entrer les fragments rédigés, sous ma direction, par M. de Paul.

PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION (1852).

Je n'ai rien changé à la distribution des matières dans cette seconde édition de mon Cours de géométrie descriptive.

En écrivant ce traité, en 1843, je n'avais point songé à écrire un ouvrage en vue de tel ou tel programme officiel ; j'ai voulu exposer mes idées, les croyant bonnes et utiles, j'ai écrit un traité *ex professo*.

J'avais toujours pensé, et cette opinion a été chez moi confirmée par trente-cinq années d'expérience dans l'enseignement, que les principes fondamentaux de la géométrie descriptive résidaient dans tous les problèmes que l'on pouvait être appelé à résoudre au sujet du point, de la droite et du plan, et que, lorsque l'on sait très-bien tout ce qui est relatif au point, à la droite et au plan, l'on aborde très-facilement les courbes et les surfaces. Qu'ainsi il fallait dans la 1re partie du cours, montrer toutes les méthodes usitées en géométrie descriptive, pour n'avoir plus à en faire que des applications dans la 2e partie, lorsque l'on s'occupait des courbes et des surfaces.

On sait le calcul différentiel lorsque l'on sait différentier toutes les fonctions connues ; on a ensuite les applications du calcul différentiel à telles ou telles questions. De même l'élève sait la géométrie descriptive, lorsque tout ce qui dans cette science est relatif au point, à la droite et au plan lui est connu ; le reste n'est plus que l'application des méthodes de la géométrie descriptive à la solution de telles ou telles questions.

D'après ces vues, j'ai dû, dans la 1re partie, exposer les principes de tous les systèmes de projection ; j'ai dû faire connaître certains procédés particuliers à la géométrie descriptive pour la solution des problèmes proposés, tels que changement

des plans de projection ; mouvement de rotation d'un point, d'une droite, d'un plan autour d'un axe ; transformation d'une figure ou d'un relief, en une autre figure ou un autre relief, etc. Dans cette seconde édition j'ai ajouté ce qui est relatif à la projection isométrique dont les Anglais et les Allemands font maintenant un usage constant dans le dessein des machines.

Lorsque cet ouvrage a paru, en 1843, il a été très-critiqué par les professeurs dont il venait gêner les habitudes, cependant peu à peu on est venu à reconnaître que je pourrais bien avoir raison. Le temps est un grand maître, il efface peu à peu toutes les oppositions à ce qui est bon et utile.

C'est ainsi que l'on commence à comprendre, que, lorsque l'on veut parler aux élèves des propriétés d'une surface, la première chose à faire est de mettre sous leurs yeux le relief de cette surface, pour qu'ils voient distinctement ce dont on veut leur parler.

Il y a plusieurs années que l'usage des modèles était encore proscrit et pour ainsi dire officiellement et de par l'autorité scientifique, dans l'enseignement de la géométrie ordinaire et de la géométrie descriptive : on enseignait en se servant seulement de la craie, du tableau noir et de l'éponge. Montrer un relief à un élève était chose défendue, on aurait semblé douter de sa haute intelligence. Aussi, ce principe admis, on en était venu à enseigner la physique en ne faisant aucune expérience ; la craie, le tableau noir et l'éponge étaient les seules choses nécessaires à un professeur, quelle que fût la science qu'il enseignât, physique, astronomie, géodésie, géométrie descriptive, mécanique, etc.

Heureusement que le bon sens a enfin fait justice de cette étrange utopie.

Donner au professeur de géométrie descriptive le moyen de faire autant de figures qu'il voudra et avec un seul instrument, est donc une chose utile.

Utile dans l'intérêt de l'enseignement, utile sous le point de vue économique.

Ce sont ces vues d'utilité et d'économie qui me portèrent, en 1829, à construire un instrument auquel je donnai le nom d'*omnibus* et qui fût apte à montrer le relief de tous les problèmes relatifs au point, à la droite et au plan, en un mot apte à montrer le relief de tout système géométrique composé de lignes droites.

Cet instrument est ainsi composé :

On prend une boîte à deux fonds, semblable à celle connue sous le nom de tric-trac portatif. On remplit chacun des deux fonds par une plaque de liége ; on a ainsi deux plans tournant autour d'une charnière.

L'un des fonds étant horizontal, on peut placer le second en une position verticale et l'y maintenir au moyen d'un crochet.

On a alors les deux plans de projection en leur véritable position.

On a ensuite quatre jeux de fiches dont la section est pour chacune un carré de 3 à 5 millimètres environ ; les fiches du premier jeu sont rouges, celles du deuxième sont noires, celles du troisième sont divisées en tronçons alternativement rouges et blancs, et celles du quatrième sont divisées en tronçons alternativement noirs et blancs.

Chaque fiche porte à son extrémité une aiguille qui permet de la fixer solidement en telle ou telle position, dans la plaque de liége.

On a ainsi un certain nombre de fiches de même longueur et de longueurs variées.

Au moyen des fiches rouges on construit dans l'espace un système rapporté de position aux deux plans de projection.

Au moyen des fiches rouges et blanches on projette les divers points du système de l'espace sur chacun des deux plans de projection ; au moyen des fiches noires et blanches, on projette sur la ligne de terre (intersection des deux plans de projection) les projections des points de l'espace ; et enfin au moyen des lignes noires on a les projections des lignes rouges de l'espace et ainsi les projections des *données* et des *résultats*. Il est inutile de dire que c'est au moyen des fiches que l'on exécute sur les deux plans rectangulaires entre eux les opérations graphiques nécessaires à la solution du problème.

Cela fait on enlève toutes les fiches, rouges et blanches, qui sont dans l'espace.

Tout le système solide a disparu, il ne reste plus que les deux projections horizontale et verticale du système. On rabat le plan vertical sur le plan horizontal et l'on a *l'épure*, au moyen de laquelle on doit et l'on peut reconstruire le système solide.

On peut donc varier à volonté les données d'un même problème et, sur le relief même, discuter le choix et la méthode à employer (en vertu des données particulières que l'élève a sous les yeux) pour la meilleure solution graphique du problème proposé.

Avec cet instrument on peut faire voir : les surfaces développables et leur arête de rebroussement, les cônes, les cylindres, les paraboloïdes, les hyperboloïdes, les conoïdes, enfin toute surface réglée.

Les professeurs peuvent faire exécuter cet instrument dans la ville où ils professent, à peu de frais, par un bon ouvrier menuisier de l'endroit.

Je me suis très-bien trouvé de l'emploi de cet omnibus dans l'enseignement de la géométrie descriptive, soit à l'école centrale des arts et manufactures depuis 1829, soit au conservatoire des arts et métiers depuis 1841.

Je saisis avec plaisir cette occasion de remercier le général d'artillerie, M. Morin, mon ancien camarade, d'avoir propagé l'usage de cet instrument dans les écoles d'arts et métiers et dans les écoles régimentaires de l'artillerie.

Paris, 25 mai 1852.

AVERTISSEMENT DE LA TROISIÈME ÉDITION.

L'ouvrage d'Olivier n'est pas une de ces compilations qui se prêtent à des additions ou à des coupures sans perdre leur caractère distinctif; c'est au contraire un livre où les vues personnelles de l'auteur sont exposées d'une manière à peu près exclusive. Olivier n'était pas un éclectique ; le rôle qu'il s'attribuait était plutôt celui d'un novateur dont les idées, d'ailleurs discutables, doivent par cela même être laissées intactes jusque dans le développement des moindres détails.

Ma ligne de conduite était donc toute tracée. Il fallait non-seulement conserver le texte d'Olivier sans altérations, mais encore n'ajouter que des notes offrant le caractère général de l'œuvre et rédigées d'après les autres écrits de l'auteur. Tel est le travail auquel je me suis livré, à la demande de madame Olivier et de M. Dunod. Ce travail est tout à fait impersonnel quant au fond (1); je n'avais pas à exposer mes propres opinions ; je ne devais ni ne voulais faire œuvre de critique ; ma mission s'est bornée à mettre en lumière les idées seules du professeur éminent dont j'ai l'honneur d'occuper aujourd'hui la chaire. Heureux d'avoir pu rendre hommage au maître dont le talent et le caractère ont laissé des traces si profondes dans le cœur de ses anciens élèves, à l'homme qui partagera à jamais, avec MM. Dumas, Lavallée et Péclet la gloire d'avoir donné à la France l'École centrale des arts et manufactures !

EUGÈNE ROUCHÉ.

Paris, 1er janvier 1870.

(1) Voir l'avertissement de la 2e partie.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PREMIÈRE PARTIE.

DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. La géométrie ordinaire montre parfaitement la disposition relative des parties d'une figure entièrement située sur un seul plan, mais elle n'est plus suffisante pour représenter les constructions que l'on doit exécuter dans l'espace, pour la solution des problèmes à trois dimensions, comme on peut s'en assurer par des exemples fort simples ; ainsi par exemple :

On sait que la distance d'un point à un plan est mesurée par la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan ; mais comment fixer la direction de cette perpendiculaire ? Comment déterminer le point où elle rencontre le plan ? La géométrie ordinaire n'enseigne pas à résoudre ces questions ; les méthodes graphiques dont elle fait usage sont à cet égard complétement impuissantes. On est obligé d'employer des méthodes particulières, dont l'étude dépend de la *géométrie descrip-*

tive ; mais pourtant la géométrie descriptive est mal définie (ou plutôt incomplétement définie) lorsqu'on dit *qu'elle a pour but d'apprendre à représenter sur une feuille de dessin, qui n'a que deux dimensions, des corps qui ont trois dimensions.* Ce n'est là qu'une faible partie de cette science ; la géométrie descriptive enseigne en outre des méthodes de recherche qui peuvent s'appliquer avantageusement à tous les problèmes de *relation de position ;* car, *en général,* l'analyse seule peut donner la solution des problèmes de *relation métrique.* Enfin, en faisant marcher ensemble ces deux branches des mathématiques, il n'est pas de problème que l'on ne puisse parvenir à résoudre.

Monge a dit de la géométrie descriptive que c'est *la langue de l'ingénieur,* il faut donc apprendre à la lire et à l'écrire.

Tous les travaux des ingénieurs se réduisent à la résolution des deux problèmes suivants :

1° *Faire un lever,* c'est-à-dire : représenter sur une feuille de dessin l'image d'un corps ou d'un système de corps existant, de manière à pouvoir le reproduire identiquement partout où l'on voudra ;

2° *Faire un projet,* c'est-à-dire : ayant conçu un corps ou un système de corps, en faire un dessin, à l'aide duquel on puisse l'exécuter exactement.

2. Lorsqu'on imprime un mouvement quelconque à un plan ou à une surface, en général elle n'éprouve aucune altération dans aucune de ses parties. Les dispositions relatives des points et des lignes entre eux demeurent les mêmes à une époque quelconque du mouvement. Les angles que les lignes forment entre elles ne changent pas de grandeur, et les longueurs des lignes non indéfinies se conservent les mêmes. Si l'on fait tourner un plan autour de son intersection avec un autre plan, jusqu'à ce qu'il se confonde avec celui-ci, on dit qu'on *rabat* le premier plan sur le second. Cette opération est fréquemment répétée en géométrie descriptive dans le but de ramener sur la feuille de dessin des constructions qui n'y sont pas contenues, ou, en d'autres termes, qu'il faudrait exécuter dans l'espace. Nous y parviendrons aussi par d'autres considérations également fécondes (*).

Représentation d'un point.

3. Un corps, une surface, une ligne, sont connus, quand on peut, au moyen

(*) Ayant mené un plan sécant à travers un corps, le rabattre, soit sur le plan horizontal, soit sur le plan vertical de projection, c'est faire en *géométrie descriptive* identiquement ce que l'on fait en *analyse* lorsqu'on emploie les formules d'Euler pour trouver l'équation d'une courbe de section dans le plan même *de section,* en rapportant cette courbe à deux axes, rectangulaires entre eux, tracés dans son plan.

des données, trouver tous les points qui composent le corps, la surface et la ligne. Il faut donc avant tout savoir fixer la position d'un point dans l'espace.

Pour cela on peut employer plusieurs méthodes dont nous parlerons par la suite, mais dont la plus simple consiste à considérer deux plans (qui se coupent à angle droit) HH′ et VV′ (*fig.* 1). On suppose que l'un d'eux, HH′, est *horizontal*, l'autre, VV′, est alors *vertical*, leur intersection LT prend le nom de *ligne de terre*. Ces deux plans, qu'il faut concevoir indéfiniment prolongés dans tous les sens, se coupent mutuellement en deux parties ou régions.

La partie LTH du plan horizontal, située en avant du plan vertical, se nomme *partie antérieure ;* la partie LTH′, située derrière le plan vertical, se nomme *partie postérieure.*

La partie LTV du plan vertical, située au-dessus du plan horizontal, se nomme *partie supérieure ;* la partie LTV′ située au-dessous du plan horizontal, se nomme *partie inférieure.*

De plus ces deux plans forment quatre angles dièdres, que l'on désigne par les noms des parties qui les comprennent, ainsi :

HLTV	se nomme	angle antérieur-supérieur	et s'écrit ainsi :	$\widehat{A, S}$
H′LTV	—	angle postérieur-supérieur	—	$\widehat{P, S}$
H′LTV′	—	angle postérieur-inférieur	—	$\widehat{P, I}$
HLTV′	—	angle antérieur-inférieur	—	$\widehat{A, I}$

4. Cela posé, si d'un point *m* de l'espace on abaisse une perpendiculaire *mn* sur le plan horizontal HH′, le pied *n* de cette ligne est dit *la projection horizontale du point m*, et la perpendiculaire *mn* est *la ligne projetant horizontalement le point m :* de même si l'on abaisse *mp* perpendiculaire sur le plan vertical VV′, le pied *p* de cette droite est *la projection verticale du point m*, et la perpendiculaire *pm* est *la ligne projetant verticalement le point m.*

5. Si l'on conduit un plan par les droites *mn* et *mp*, la figure *mnop* située dans ce plan est évidemment un rectangle ; de plus ce plan est perpendiculaire aux deux plans HH′ et VV′, et par suite à leur intersection LT ; donc :

1° La distance *mn* du point *m* au plan horizontal est égale à la distance *po* de sa projection verticale à la ligne de terre ;

2° La distance *mp* du point *m* au plan vertical est égale à la distance *no* de sa projection horizontale à la ligne de terre ;

3° Si des deux projections d'un même point on abaisse des perpendiculaires sur la ligne de terre, elles la coupent au même point.

6. *Les deux projections n et p d'un point m en fixent la position dans l'espace.* En

effet le point doit se trouver sur une perpendiculaire au plan HH′ élevée par la projection horizontale *n* et à une distance égale à *op*, donc en prenant *nm=op*, le point *m* est le point cherché; on obtient aussi le même point *m* de l'espace en prenant *pm=on*, sur une perpendiculaire élevée du point *p* au plan vertical VV′; enfin on sait que les perpendiculaires aux plans HH′ et VV′, élevées respectivement par les points *n* et *p*, sont dans un même plan, elles se coupent donc au point *m*, dont les points *n* et *p* sont les projections.

7. Un point est encore déterminé par la condition d'être situé à la fois sur deux droites ou sur une droite et un plan, c'est même toujours ainsi qu'il est donné; car assigner les deux projections d'un point c'est dire que le point est sur deux droites perpendiculaires aux plans de projection, et passant par les projections données de ce point.

8. Dans ce qui précède nous avons considéré deux plans perpendiculaires entre eux; pour ramener toutes les constructions à n'être exécutées que sur la feuille de dessin et ainsi sur un seul plan et non dans l'espace, on suppose que le plan vertical VV′ tourne autour de la droite LT, comme charnière, pour se *rabattre* sur le plan horizontal HH′ et de telle manière que la partie supérieure LTV de ce plan vertical se couche sur la partie postérieure LTH′ du plan horizontal, et que la partie inférieure LTV′ se recouche sous la partie antérieure LTH.

Dans ce mouvement la projection verticale *p* du point *m* de l'espace, est entraînée, ainsi que la ligne *op* laquelle vient se placer, après le rabattement, en *oq* sur le prolongement de la droite *no*, de telle sorte qu'après le rabattement du plan vertical les deux projections *n* et *q* d'un même point *m* de l'espace sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. On doit conclure de ce qui précède que, sur le dessin tracé sur une feuille de papier, dessin que l'on appelle épure : *deux points choisis arbitrairement, l'un sur le plan vertical et l'autre sur le plan horizontal des projections ne peuvent représenter les projections d'un même point de l'espace, qu'autant qu'ils sont situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

9. A l'avenir, nous désignerons un point de l'espace par une lettre minuscule, et ses projections par la même lettre avec un indice supérieur *h* ou *v*. Ainsi le point *m* de l'espace est celui dont les projections horizontale et verticale sont respectivement m^h et m^v (*fig.* 2). Un point étant déterminé, en géométrie descriptive, par ses deux projections, quand on dit, qu'un point est donné, il faut entendre que l'on donne les projections horizontale et verticale de ce point ; et quand on demande de trouver un point de l'espace, il faut entendre qu'on demande de trouver les deux projections de ce point.

Quand une figure est énoncée ou décrite dans l'espace, il faut pouvoir l'écrire immédiatement sur la feuille de dessin, ou, en d'autres termes, sur un seul plan ; et

réciproquement, quand une figure est écrite sur la feuille de dessin, il faut savoir la lire immédiatement dans l'espace. Pour cela il faut, au moyen des projections d'un point, concevoir de suite la position qu'il occupe dans l'espace; et, réciproquement, connaissant la position d'un point dans l'espace, il faut savoir en déduire de suite les positions de ses deux projections.

10. *Alphabet du point.* — Un point peut occuper dans l'espace plusieurs positions qui seront indiquées par celles de ses projections à l'égard de la ligne de terre, comme elles le sont dans la géométrie analytique par les signes et les grandeurs des coordonnées.

1° Lorsqu'un point est situé dans l'un des quatre angles dièdres formés par les plans de projection, il est facile de voir que les projections de ce point se trouvent sur les parties des plans qui comprennent cet angle: les quatre positions que le point peut affecter dans ce cas sont indiquées par la *fig.* 3.

2° Le point peut être sur l'un des plans de projection; il est alors à lui-même sa projection sur ce plan, et son autre projection est évidemment sur la ligne de terre. On a encore quatre cas représentés par la *fig.* 4, où l'on a écrit la lettre *m*, qui désigne le point, sans indice pour exprimer que c'est le point lui-même et non une de ses projections.

3° Si le point est sur la ligne de terre, il n'a pas d'autres projections que lui-même, c'est pourquoi on écrit seulement la lettre *m* à côté du point (*fig.* 5).

4° Un point, situé dans l'un des quatre angles dièdres, peut être également distant des deux plans de projection, c'est-à-dire que l'on peut avoir $om^v = om^h$ (*fig.* 2) (N° 5); dans ce cas les deux projections se confondent lorsqu'elles sont du même côté de la ligne de terre; on a donc encore les deux cas représentés dans la *fig.* 6. On conclut de là que :

1° *Tous les points dont les projections sont distinctes et également éloignées de la ligne de terre, se trouvent sur le plan bissecteur des angles dièdres* $\widehat{A, S}$ *et* $\widehat{P, I}$;

1° *Tous les points dont les projections sont confondues, se trouvent sur le plan bissecteur des angles dièdres* $\widehat{P, S}$ *et* $\widehat{A, I}$.

Représentation de la ligne droite.

11. Si par tous les points d'une droite on abaisse des perpendiculaires sur le plan horizontal, leurs pieds sont les projections horizontales des divers points de la droite, et la ligne qui les unit est la *projection horizontale de la droite.* Toutes ces perpendiculaires sont dans un même plan perpendiculaire au plan ho-

rizontal et dont l'intersection avec ce plan est la *projection* de la droite ; on raisonnerait de même à l'égard de la projection d'une droite sur tout autre plan ; donc *la projection d'une droite sur un plan est une ligne droite*. On obtient les deux projections d'une droite en menant par cette droite deux plans respectivement perpendiculaires aux plans de projection ; on les nomme *plan projetant horizontalement la droite* et *plan projetant verticalement la droite*.

12. Nous désignerons une droite de l'espace par une lettre majuscule, et ses projections par la même lettre avec des indices supérieurs h ou v ; ainsi D^h et D^v (*fig.* 7) sont les projections horizontale et verticale de la droite D. Quelquefois aussi nous indiquerons une droite par deux de ses points, et principalement une droite finie de longueur, qui doit très-souvent être désignée par les points auxquels elle se termine ; ainsi, la droite passant par deux points a et b sera désignée de la manière suivante : droite (a, b).

13. *Une droite est, en général, déterminée par ses deux projections ;* car en élevant par D^h un plan perpendiculaire au plan horizontal, et par D^v un plan perpendiculaire au plan vertical, la droite D doit se trouver à la fois sur ces deux plans, elle est donc leur intersection. Il résulte de là qu'une droite donnée par ses deux projections est réellement donnée par deux plans dont elle est l'intersection.

Une droite est aussi complétement déterminée par deux de ses points ; car ils feront connaître deux points de chaque *projection*. Parmi les points d'une droite on considère d'une manière spéciale les deux points en lesquels elle perce les plans de projection et que l'on nomme les *traces* de la droite ; ces deux points remarquables sont très-propres à fixer la direction d'une droite par rapport aux plans des projections et par suite sa direction dans l'espace.

14. Problème 1. — *Étant données les traces d'une droite, construire ses projections* (*fig.* 7). Soient a la trace horizontale et b la trace verticale d'une droite D ; a^v et b^h seront sur la ligne de terre (n° 10, 2°) et sur des perpendiculaires à cette ligne abaissées des points a et b (n° 8) ; on aura donc deux points a et b^h de D^h et deux points a et a^v de D^v ; donc ces projections D^h et D^v sont connues.

15. Problème 2. — *Trouver les traces d'une droite, dont on connaît les projections* (*fig.* 7). La trace horizontale appartenant à la fois à la droite D et au plan horizontal, sa projection verticale doit être sur D^v et sur LT, donc en a^v ; le point a est à lui-même sa projection horizontale, donc il se trouve sur D^h et sur une perpendiculaire menée à la ligne de terre par a^v, c'est-à-dire à l'intersection a de ces deux droites. De même la trace verticale étant sur D et sur un plan vertical, sa projection horizontale est en b^h, et le point est lui-même en b.

De là on peut conclure que pour avoir une des traces d'une droite, *il faut prolonger la projection de nom contraire jusqu'à la ligne de terre et par le point de rencontre*

avec cette ligne de terre, élever une perpendiculaire à cette ligne de terre, et le point où cette perpendiculaire coupe l'autre projection de la droite sera la trace demandée.

16. Une droite indéfiniment prolongée peut n'être pas toute entière contenue dans un seul des angles dièdres formés par les plans de projection ; alors la portion située dans l'angle dièdre $\widehat{A, S}$ est *vue*, mais tout ce qui se trouve derrière le plan vertical ou au-dessous du plan horizontal est caché par l'un de ces plans ; on exprime cela sur la figure par la manière d'écrire les projections de ces portions de la droite. On est convenu d'écrire en *lignes pleines* les projections de la partie comprise dans l'angle dièdre $\widehat{A, S}$, et en *lignes ponctuées* (ou formées de points ronds) les projections des parties de droite comprises dans l'un des trois autres angles dièdres, comme nous l'indiquerons sur les figures suivantes : il est évident qu'une portion de droite *vue* a, sur l'épure, sa projection horizontale au-dessous et sa projection verticale au-dessus de la ligne de terre.

Mais cette ponctuation ne convient qu'aux *lignes principales* d'une figure c'est-à-dire, aux lignes qui représentent les données ou les quantités cherchées du problème. Quant aux autres lignes on les distingue en deux classes :

1° *Lignes auxiliaires* qui, sans être au nombre des lignes principales ci-dessus indiquées, jouent dans la figure un rôle assez important ; on les écrit en *lignes mixtes*, c'est-à-dire formées de petits traits longs et séparés entre eux par un ou plusieurs points ronds ;

2° *Lignes de construction*, que l'on nomme aussi quelquefois lignes de projection, qui sont censées ne pas exister, parce qu'elles n'ont dans l'épure qu'un rôle d'une très-faible importance ; on les trace en *lignes pointillées*, c'est-à-dire formées de petits traits plus courts et plus fins que ceux des lignes mixtes (les lignes de projection sont celles qui unissent entre eux, sur l'épure, les points qui sont les projections d'un même point de l'espace, elles sont dès lors perpendiculaires à la ligne de terre).

Outre les parties d'une figure cachées par les plans de projection, d'autres parties peuvent l'être par les parties antérieures de la figure elle-même ; mais pour ne pas multiplier sans nécessité les lignes ponctuées, ce qui en outre nuirait à l'intelligence de la figure, on suppose souvent que ces portions de la figure sont seulement représentées par les lignes tracées sur les plans de projection, lignes qui suffisent ordinairement pour les déterminer complétement.

17. *Alphabet de la droite.* Une droite peut affecter dans l'espace (et ainsi par rapport aux deux plans de projection) un grand nombre de positions, qu'on exprime, sur l'épure, par les situations respectives de ses projections par rapport à la ligne de terre, et par la ponctuation de ses *projections*.

1° La droite peut être oblique par rapport aux deux plans de projection, et la

portion comprise entre ses traces horizontale et verticale, peut être située dans l'un des quatre angles dièdres ; il est évident que les traces de la droite sont situées sur les parties des plans qui forment cet angle ; ainsi on aura les quatre positions indiquées (*fig.* 8), qu'il serait facile de lire par la ponctuation seule. Pour établir cette ponctuation, remarquons que dans le premier cas la partie *ab* étant dans l'angle $\widehat{A, S}$ est *vue*, les portions ab^h et $a^v b$ des projections doivent donc être en ligne pleine ; mais au delà du point *a* la droite D passe au-dessous du plan horizontal, et au delà du point *b* elle passe derrière le plan vertical : c'est pourquoi les parties de la projection horizontale situées en dehors des points *a* et b^h et les parties de la projection verticale situées en dehors des points *a* et b^v sont en lignes ponctuées. On trouverait de même la ponctuation qu'il convient d'adopter dans les trois autres cas. Supposant maintenant les droites tracées sans notation ; pour conclure de la ponctuation seule où est la projection horizontale, nous dirons : la partie de la droite dont les projections sont en ligne pleine doit être dans l'angle $\widehat{A, S}$; donc dans le 4e cas, par exemple, c'est la portion à gauche du point *a* ; donc pour cette partie la projection horizontale est au-dessous et la projection verticale au-dessus de la ligne de terre. Par suite le point *a* est la trace horizontale et le point *b* la trace verticale de la droite. On trouverait de même la direction de la droite dans les trois autres cas.

2° La droite peut être parallèle au plan horizontal ; sa projection verticale est alors parallèle à la ligne de terre, car tous les points de la droite D sont à la même distance du plan horizontal ; la projection horizontale est quelconque, et l'on a les trois positions indiquées (*fig.* 9), suivant que la droite D est au-dessus du plan horizontal, dans ce plan, ou au-dessous de lui.

3° Si la droite est parallèle au plan vertical ; sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre, sa projection verticale est quelconque, et l'on a les trois positions indiquées (*fig.* 10), suivant que la droite D est en avant du plan vertical, dans ce plan, ou derrière lui.

4° La droite peut être parallèle à la fois aux deux plans de projection, et par conséquent à la ligne de terre ; ses deux projections sont alors parallèles à LT. Ce cas présente neuf positions, savoir : *quatre*, lorsque la droite est située dans l'un des quatre angles dièdres (*fig.* 11) ; *quatre*, lorsqu'elle se trouve sur l'une des quatre régions des plans de projection (*fig.* 12) ; enfin elle peut être confondue avec la ligne de terre (*fig.* 13). Ces neuf positions sont les mêmes que les neuf positions du point (*fig.* 3, 4, 5), il suffit de remplacer les points *m*, m^h, m^v, etc., par des droites D, D^h, D^v, etc., parallèles à la ligne de terre. Si dans ce cas la droite est également distante des deux plans de projection, ses deux projections seront distinctes ou

séparées et placées à la même distance de la ligne de terre, lorsque cette droite sera située dans les angles dièdres $\widehat{A, S}$ ou $\widehat{P, I}$. Elles se confondront quand elles seront situées du même côté (*fig.* 14) de la ligne de terre ; et, dans ce cas, la droite se trouvera dans les angles dièdres $\widehat{A, I}$ et $\widehat{P, S}$. Dans le premier cas la droite sera sur le plan bissecteur de l'angle $\widehat{A, S}$, et dans le deuxième cas elle sera sur le plan bissecteur de l'angle $\widehat{A, I}$.

5° Si la droite est perpendiculaire au plan horizontal, sa projection horizontale se réduit à un seul point et sa projection verticale est perpendiculaire à la ligne de terre, car le plan projetant verticalement la droite et le plan vertical de projection sont tous deux perpendiculaires au plan horizontal. La droite peut dans ce cas affecter trois positions : elle peut être située en avant du plan vertical, dans ce plan, ou derrière lui (*fig.* 15).

6° Trois positions semblables (*fig.* 16) répondent au cas d'une droite perpendiculaire au plan vertical et située au-dessus du plan horizontal, dans ce plan, ou au-dessous de lui.

Il résulte de ces deux cas que om^v (*fig.* 2) est la projection verticale de la droite projetant horizontalement le point m, laquelle a pour projection horizontale le point m^h, et om^h est la projection horizontale de la droite projetant verticalement le point m, laquelle a pour projection verticale le point m^v.

7° Si la droite D a dans l'espace une direction perpendiculaire à la ligne de terre LT, ses deux projections se confondent en une seule droite perpendiculaire à la ligne de terre ; car si l'on fait passer par la droite D un plan vertical, ce plan est de plus perpendiculaire à LT ; donc ses intersections avec les deux plans de projection, ou D^h et D^v, sont toutes deux perpendiculaires à LT et la coupent au même point, et par conséquent se confondent après le rabattement du plan vertical. Les deux projections de la droite ne suffisent donc plus, *dans ce cas*, pour en fixer la direction dans l'espace, mais elle sera complétement déterminée si l'on donne deux de ses points. La droite dans ce cas peut affecter quatre positions suivant que la portion comprise entre ses traces est interceptée dans l'un des quatre angles dièdres (*fig.* 17).

8° Si la droite rencontre la ligne de terre, ses traces a et b se confondent en un même point de cette ligne ; dans ce cas il peut arriver que les projections D^h et D^v (*fig.* 18) fassent des angles aigus avec la même portion de LT, l'une au-dessus et l'autre au-dessous ; cette disposition appartient évidemment à une droite traversant les angles $\widehat{A, S}$ et $\widehat{P, I}$. Si les angles aigus sont formés avec les deux parties LT (*fig.* 19), cela représente évidemment une droite traversant les angles $\widehat{P, S}$ et $\widehat{A, I}$. Si les angles aigus sont égaux, la droite est sur l'un des deux plans bissecteurs

(nº 10, 4°) et dans le dernier cas les deux projections se confondent en une seule droite (*fig.* 20).

9° Si la droite rencontrant la ligne de terre lui est perpendiculaire, les deux projections se réunissent en une seule droite perpendiculaire à LT ; dès lors elles ne suffisent plus pour la déterminer ; il faut alors donner un autre point quelconque de la droite (*fig.* 21).

18. On voit par tout ce qui précède qu'une droite est toujours entièrement déterminée par les projections de deux de ses points, tandis que, dans quelques cas particuliers, les projections de la droite ne sont plus suffisantes.

19. Deux droites qui ne sont pas perpendiculaires à la ligne de terre peuvent toujours représenter les projections d'une droite de l'espace. Car en élevant les deux plans projetants, ils se coupent suivant une droite déterminée. La droite est indéterminée quand les deux projections se confondent en une perpendiculaire à la ligne de terre LT. Deux droites dont une seule est perpendiculaire à la ligne de terre, ou qui lui étant toutes deux perpendiculaires ne la coupent pas au même point, ne peuvent pas être les projections d'une même droite de l'espace.

20. Deux droites D et D′ situées dans l'espace peuvent se couper, être parallèles, ou n'être pas situées dans un même plan.

1° Si elles se coupent (*fig.* 22), les projections de leur point d'intersection m appartiennent à la fois aux projections de ces deux droites D et D′, donc m^h et m^v en lesquels se coupent respectivement les projections D^h, D'^h et D^v, D'^v, doivent (*sur l'épure*) être situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (nº 8).

2° Si elles sont parallèles, leurs projections de même noms ont parallèles (*fig.* 23), car les deux plans projetants correspondants sont parallèles.

3° Si elles ne sont pas situées dans un même plan, le point d'intersection de leurs projections verticales n'est pas sur une même perpendiculaire à la ligne de terre avec le point d'intersection de leurs projections horizontales (*fig.* 24).

21. Les réciproques de ces trois propositions sont vraies, c'est-à-dire que, 1° si les projections de deux droites se coupent en deux points m^v et m^h situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (*fig.* 22), les droites se coupent dans l'espace ; car le point m, ayant ses projections sur celles de la droite D, appartient à cette droite et par une même raison il appartient à la droite D′.

2° Si les projections de même nom sont parallèles (*fig.* 23) les droites sont parallèles, car les quatre plans projetant sont deux à deux parallèles et par conséquent les quatre intersections dont deux ne sont autres que les droites D et D′, sont aussi parallèles.

3° Si les projections des droites se coupent en des points non situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, les droites ne sont pas dans un même plan

(*fig.* 24), car deux droites tracées sur un plan se coupent ou sont parallèles, et leurs projections seraient disposées comme dans les *fig.* 22 ou 23. Il en résulte que si les deux projections horizontales seules ou si les deux projections verticales seules sont parallèles, les droites ne sont pas parallèles.

22. Lorsque deux droites sont perpendiculaires à LT, leurs projections sont respectivement parallèles ; mais il n'en résulte pas que les droites dans l'espace le soient. Mais si D et D′ (*fig.* 25) sont parallèles, choisissant deux points a et b, a' et b' sur chaque droite, si l'on conçoit des verticales abaissés des points b et b' et des horizontales menées des points a et a' qui coupent les verticales en des points que nous désignerons par i et i', on formera deux triangles abi, $a'b'i'$ qui seront semblables comme ayant les côtés respectivement parallèles, on a donc :

$$ia : ib :: i'a' : i'b'$$

mais

$$ia = a^h b_h,\ ib = a^v b^v,\ i'a' = a'^h b'^h,\ i'b' = a'^v b'^v$$

donc

$$a^h b^h : a^v b^v :: a'^h b'^h : a'^v b'^v$$

23. Réciproquement, si cette relation a lieu, les droites D et D′ sont parallèles ; car ayant construit comme ci-dessus les triangles abi et $a'b'i'$ rectangles en i et i', ils sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels ; ces côtés sont en outre parallèles, donc aussi les hypoténuses ab et $a'b'$ ou les droites D et D′ sont parallèles.

24. Problème 3. *Par un point donné mener une droite parallèle à une droite donnee* (*fig.* 26). Les projections de la droite cherchée X doivent passer respectivement par les projections du point donné m, et être parallèles aux projections de la droite donnée D.

Représentation des lignes courbes.

25. Si de tous les points $a, b, c, \ldots m$ (*fig.* 27) d'une courbe C on abaisse des perpendiculaires sur le plan horizontal, les pieds $a^h, b^h, c^h, \ldots m^h$ de ces perpendiculaires forment une ligne C^h, qui est la *projection horizontale de la courbe* C. Toutes les perpendiculaires $aa^h, bb^h, cc^h, \ldots mm^h$ sont parallèles et forment une surface que nous désignerons plus loin sous le nom de *surface cylindrique*, et qui est dite *surface ou cylindre projetant horizontalement la courbe* C. En abaissant de même des perpendiculaires sur le plan vertical, elles formeront *le cylindre projetant verticalement la courbe* C. Une courbe C peut donc être toujours considérée comme l'intersection de deux surfaces cylindriques.

Si la courbe C était tracée dans un plan perpendiculaire au plan horizontal, par exemple, toutes les droites aa^h, bb^h, etc.. seraient situées dans ce plan, C^h serait l'intersection de ce plan avec le plan horizontal, et par conséquent cette projection de la courbe C serait une droite et l'autre projection serait nécessairement une courbe. Si la courbe C était dans un plan perpendiculaire à LT, ses deux projections seraient l'une et l'autre des droites.

26. Problème 4. *Trouver les points en lesquels une courbe rencontre les plans de projection* (*fig.* 28). Les points en lesquels la courbe C rencontre le plan horizontal se projettent verticalement sur C^v et sur LT (n° 20, 2°), donc à leur intersection en a^v et en b, les points a et b seront sur C^h et sur des perpendiculaires à LT élevées par les points a^v et b^v; mais ces perpendiculaires rencontrent généralement la courbe C^h en plusieurs points, qui peuvent indifféremment être pris pour les traces de la courbe C, à moins que par une circonstance quelconque on soit conduit à exclure quelques-uns d'entre eux, comme dans ce cas-ci, par exemple, nous excluons les points α et β qui, évidemment, ne peuvent être les traces de la courbe C. On trouverait de même les traces verticales de la courbe C.

Remarquons qu'une partie de C^h ne correspond à aucune partie de C^v et ne peut pas par conséquent être la projection d'une portion de la courbe C; de même une partie de C^v n'appartient pas à la projection de la courbe C : nous donnerons ailleurs l'explication de cette circonstance.

Les lignes courbes étant représentées de la même manière que les lignes droites, au moyen de deux projections, on doit en conclure que, si deux courbes, C et C′, situées dans l'espace, se coupent en un point m, leurs projections C^h, C'^h et C^v, C'^v se couperont respectivement en des points qui seront m^h et m^v projections du point m, et dès lors tels qu'ils pourront (*sur l'épure*) être unis par une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Représentation du plan.

27. Par deux droites parallèles, ou qui se coupent, par une droite et un point, par trois points, on peut faire passer un plan et on ne peut en faire passer qu'un ; parmi les droites qui peuvent fixer la position d'un plan dans l'espace, on choisit celles en lesquelles il coupe les plans de projection et que l'on nomme les *traces du plan*. Il est évident que les deux traces d'un plan doivent rencontrer la ligne de terre au même point, qui est le point d'intersection de cette ligne et du plan.

Nous désignerons un plan dans l'espace par une lettre majuscule, et ses traces horizontale et verticale respectivement par les lettres H et V avec la lettre

qui désigne le plan, pour indice, ainsi (*fig.* 29) H^p et V^p sont les traces du plan P.

Lorsqu'un plan sera donné par deux droites nous l'indiquerons par les lettres qui désignent ces droites mises entre parenthèses : ainsi le plan (A, B) signifiera le plan déterminé par les deux droites A et B ; nous dirons de même le plan (A, *a*) pour indiquer le plan déterminé par la droite A et le point *a* ; et enfin le plan (*a*, *b*, *c*) exprimera le plan passant par les trois points *a*, *b* et *c*.

28. Problème 5. *Étant connue la projection horizontale d'une droite située sur un plan donné par ses traces, trouver sa projection verticale* (*fig.* 29). Il est évident que les traces d'une droite située sur un plan se trouvent sur les traces de ce plan, donc la trace horizontale de la droite D sera le point *a*, intersection de H^p et D^h, d'où l'on déduit un point a^v de D^v. La trace verticale de D se projette horizontalement au point b^h, intersection de D^h et de LT, et le point lui-même est en *b* sur V^p ; donc on connaît D^v. Si l'on donnait D^v on en conclurait de même D^h.

29. Problème 6. *Étant connue la projection horizontale d'un point situé sur un plan donné par ses traces, trouver sa projection verticale* (*fig.* 29). Si par le point *m* et dans le plan P on conduit une droite D quelconque, D^h passera par m^h, et l'on en conclura D^v (n° 20) ; puis m^v, devant se trouver sur D^v et sur une perpendiculaire à LT et abaissée du point m^h, sera à l'intersection de ces deux droites. Si l'on donnait m^v, on en conclurait de la même manière m^h.

Il résulte de là qu'*un plan est complétement déterminé par ses traces.*

30. *Un plan est aussi complétement déterminé par deux droites quelconques, qui se coupent* (*fig.* 30). En effet soit m^h la projection horizontale d'un point appartenant au plan (A, B) (n° 27) ; par le point *m* et dans le plan (A, B) menons une droite quelconque X ; X^h passera par m^h, cette droite X rencontrera nécessairement les droites A et B en des points *a* et *b*, dont les projections horizontales sont les points a^h et b^h, intersection de X^h avec A^h et B^h ; on en conclut a^v et b^v qui font connaître la droite X^v sur laquelle est située la projection verticale m^v du point *m*, donc ce point est déterminé. Il est évident qu'il en serait de même si les droites A et B étaient parallèles.

31. Problème 7. *Un plan étant donné par deux droites (qui se coupent), en trouver les traces* (*fig.* 31 et 32). Les traces de chacune des droites devant se trouver sur les traces du plan, nous chercherons ces traces (n° 15) et nous aurons deux points *a* et *b* de H^p et deux points *a'* et *b'* de V^p ; il faut en outre que ces traces coupent LT au même point, ce qui servira de vérification à l'exactitude des constructions.

Nous dirons à cette occasion que dans tous les problèmes à résoudre, l'élégance des méthodes consiste à se ménager le plus possible des moyens de vérification,