Dépôt Légal
Seine
N° 9360
1908

ŒUVRES

DE

CHARLES HERMITE

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE
R.F.
IMPRIMÉS

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

Par ÉMILE PICARD,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

TOME II.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1908

Tous droits de traduction et de reproduction réservés.

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE IMPRIMÉS

AVERTISSEMENT.

Comme pour le premier Volume, nous suivons à peu près dans le Tome II l'ordre chronologique. Les Mémoires ici reproduits vont de 1858 à 1872; nous y avons joint des Notes publiées par Hermite dans différents Ouvrages, quelques pages de son *Cours d'Analyse* de l'École Polytechnique, et une Lettre à M. Tannery se rapportant aux fonctions modulaires.

Il m'est agréable d'offrir à M. Henry Bourget mes vifs remercîments pour le concours très précieux qu'il m'a apporté dans la revision du texte et dans la correction des épreuves. Tous les calculs ont été refaits ou au moins indirectement contrôlés par lui. Il y a eu là, pour certains Mémoires, en particulier pour les études relatives à l'équation modulaire et à l'équation du cinquième degré, un travail d'autant plus considérable que la rédaction d'Hermite, dans les questions algébriques, est extrêmement concise et laisse souvent de côté des intermédiaires. A la suite de cette revision, il nous a paru utile de faire dans le texte certaines modifications d'un caractère surtout numérique; les plus importantes d'entre elles sont signalées dans des notes.

J'adresse aussi tous mes remercîments à M. Gauthier-Villars pour les soins qu'il donne à cette édition. Nous sommes heureux d'avoir pu placer au début de ce Volume un portrait d'Hermite, qui le représente aux environs de sa cinquantième année.

ÉMILE PICARD.

ŒUVRES

DE

CHARLES HERMITE.

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE
R.F.
IMPRIMÉS

TOME II.

SUR

LA THÉORIE DES FORMES CUBIQUES

A TROIS INDÉTERMINÉES.

Journal de Mathématiques pures et appliquées,
2e série, t. III, 1858, p. 37.

L'étude des fonctions homogènes du troisième degré et à trois indéterminées conduit à considérer avec une forme donnée de cette espèce deux systèmes différents de fonctions qui s'en déduisent, et dont je rappellerai en premier lieu les expressions. Soit pour cela U la transformée canonique de la forme proposée, de sorte que l'on ait

$$U = x^3 + y^3 + z^3 + 6\,l\,xyz;$$

le premier de ces systèmes sera celui des invariants et du covariant cubique, savoir :

$$S = -l + l^4,$$
$$T = 1 - 20\,l^3 - 8\,l^6,$$
$$HU = l^2(x^3 + y^3 + z^3) - (1 + 2\,l^3)\,xyz.$$

Le second système sera formé des deux contrevariants ou formes cubiques adjointes, savoir :

$$PU = -l(x^3 + y^3 + z^3) + (-1 + 4l^3)xyz,$$
$$QU = (1 - 10l^3)(x^3 - y^3 + z^3) - 6l^2(5 + 4l^3)xyz.$$

J'omets à dessein les covariants et formes adjointes d'un degré supérieur au troisième, n'ayant pas à m'en occuper ici, et j'observe seulement que les combinaisons linéaires

$$\alpha U + 6\beta HU,$$
$$6\alpha PU + \beta QU,$$

où α et β sont des constantes indéterminées, représentent encore, la première un covariant et la seconde une forme adjointe de U. On en peut conclure que les invariants du quatrième et du sixième ordre de ces deux fonctions, que nous désignerons avec M. Cayley de cette manière :

$$S(\alpha U + 6\beta HU),$$
$$S(6\alpha PU + \beta QU),$$
$$T(\alpha U + 6\beta HU),$$
$$T(6\alpha PU + \beta QU),$$

doivent reproduire des combinaisons rationnelles des invariants primitifs S et T. C'est effectivement ce que ce savant géomètre a mis en évidence en donnant dans les Tables qui terminent son troisième Mémoire sur les *quantics* les expressions complètement développées de ces quatre quantités. En cherchant à approfondir la nature de ces expressions, j'ai été conduit à un résultat intéressant, non seulement parce qu'il en montre le véritable caractère, mais parce qu'il donne un nouvel exemple de cette étroite connexion entre les formes cubiques à trois indéterminées et les formes biquadratiques binaires, que M. Hesse et M. Aronhold ont les premiers signalée dans leurs belles recherches. Mais je dois rappeler d'abord qu'en représentant une forme binaire du quatrième degré par

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4,$$

on a, pour les covariants des degrés quatrième et sixième, ces

expressions

$$g = (ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 + 2(be - cd)xy^3 + (ce - d^2)y^4,$$

$$\begin{aligned} h = \; & (a^2d - 3abc + 2b^3)x^6 \\ & + (a^2e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2c)x^5y \\ & + (5abe - 15acd + 10b^2d)x^4y^2 \\ & + (-10ad^2 + 10b^2e)x^3y^3 \\ & + (-5ade + 15bce - 10bd^2)x^2y^4 \\ & + (-ae^2 - 2bde + 9c^2e - 6cd^2)xy^5 \\ & + (-be^2 + 3cde - 2d^3)y^6. \end{aligned}$$

Cela posé, je considère la forme biquadratique suivante en α et β, savoir :

$$f = \alpha^4 - 24S\alpha^2\beta^2 - 8T\alpha\beta^3 - 48S^2\beta^4,$$

et si l'on en déduit, d'après les formules qui viennent d'être rapportées, les deux covariants g et h, on aura ces formules remarquables, savoir :

$$S(\alpha U + 6\beta HU) = -\frac{1}{4}g,$$

$$T(\alpha U + 6\beta HU) = -\frac{1}{2}h,$$

$$64S^3(\alpha U + 6\beta HU) - T^2(\alpha U + 6\beta HU) = (64S^3 - T^2)f^3.$$

Soit en second lieu

$$f = 48S\alpha^4 + 8T\alpha^3\beta - 96S^2\alpha^2\beta^2 - 24TS\alpha\beta^3 - (T^2 + 16S^3)\beta^4,$$

on obtiendra d'une manière toute semblable

$$S(6\alpha PU + \beta QU) = -\frac{1}{4}g,$$

$$T(6\alpha PU + \beta QU) = -\frac{1}{2}h,$$

$$64S^3(6\alpha PU + \beta QU) - T^2(6\alpha PU + \beta QU) = (64S^3 - T^2)^2f^3.$$

Ces deux formes f du quatrième degré que nous avons employées successivement ont d'ailleurs entre elles cette liaison singulière que, si l'on désigne par k, k', k'', k''' les racines de l'équation

$$x^4 - 24Sx^2 - 8Tx - 48S^2 = 0,$$

les racines de l'autre forme, c'est-à-dire de l'équation

$$48\,\mathrm{S}x^4 + 8\,\mathrm{T}x^3 - 96\,\mathrm{S}^2x^2 - 24\,\mathrm{TS}x - (\mathrm{T}^2 + 16\,\mathrm{S}^3) = 0,$$

seront

$$\frac{1}{4}k + \frac{\mathrm{S}}{k},\quad \frac{1}{4}k' + \frac{\mathrm{S}}{k'},\quad \frac{1}{4}k'' + \frac{\mathrm{S}}{k''},\quad \frac{1}{4}k''' + \frac{\mathrm{S}}{k'''}.$$

Je reviendrai sur ce point dans un prochain travail, où je me propose d'établir entre autres choses cette proposition qu'il existe toujours *une substitution linéaire réelle* pour réduire toute forme cubique donnée à coefficients réels à l'expression canonique

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6\,lxyz.$$

La même chose n'a pas lieu, comme on sait, ni pour les formes biquadratiques, ni pour les formes cubiques à deux indéterminées.

SUR LA RÉSOLUTION

DE

L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XLVI, 1858 (I), p. 508.

On sait que l'équation générale du cinquième degré peut être ramenée, par une substitution dont les coefficients se déterminent sans employer d'autres irrationnalités que des radicaux carrés et cubiques, à la forme

$$x^5 - x - a = 0.$$

Ce résultat remarquable, dû au géomètre anglais M. Jerrard, est le pas le plus important qui ait été fait dans la théorie algébrique des équations du cinquième degré, depuis qu'Abel a démontré qu'il était impossible de les résoudre par radicaux. Cette impossibilité manifeste en effet la nécessité d'introduire quelque élément analytique nouveau dans la recherche de la solution, et, à ce titre, il semble naturel de prendre comme auxiliaire les racines de l'équation si simple dont nous venons de parler. Toutefois, pour légitimer véritablement son emploi comme élément essentiel de la résolution de l'équation générale, il restait à voir si cette simplicité de forme permettait effectivement d'arriver à quelque notion sur la nature de ses racines, de manière à saisir ce qu'il y a de propre et d'essentiel dans le mode d'existence de ces quantités, dont on ne sait jusqu'ici rien autre chose, si ce n'est qu'elles ne s'expriment point par radicaux. Or il est bien remarquable que l'équation de M. Jerrard se prête avec la plus grande facilité à cette recherche, et soit même, dans le sens que nous allons expliquer, susceptible d'une véritable résolution

analytique. On peut en effet concevoir la question de la résolution des équations algébriques sous un point de vue différent de celui qui depuis longtemps a été indiqué par la résolution des équations des quatre premiers degrés, et auquel on s'est surtout attaché. Au lieu de chercher à représenter par une formule radicale à déterminations multiples le système des racines si étroitement liées entre elles lorsqu'on les considère comme fonctions des coefficients, on peut, ainsi que l'exemple en a été donné dans le troisième degré, chercher, en introduisant des variables auxiliaires, à obtenir les racines séparément exprimées par autant de fonctions distinctes et uniformes relatives à ces nouvelles variables. Dans le cas dont nous venons de parler, où il s'agit de l'équation

$$x^3 - 3x + 2a = 0,$$

il suffit, comme on sait, de représenter le coefficient a par le sinus d'un arc α pour que les racines se séparent en ces trois fonctions bien déterminées

$$2\sin\frac{\alpha}{3},\quad 2\sin\frac{\alpha+2\pi}{3},\quad 2\sin\frac{\alpha+4\pi}{3}.$$

Or c'est un fait tout semblable que nous avons à exposer relativement à l'équation

$$x^5 - x - a = 0.$$

Seulement, au lieu des sinus ou cosinus, ce sont les transcendantes elliptiques qu'il sera nécessaire d'introduire, et nous allons en premier lieu en rappeler les définitions.

Soient K et K′ les périodes de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

c'est-à-dire

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},\qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}},$$

et

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}};$$

la racine quatrième du module et de son complément s'exprime au moyen de q par ces fonctions dont Jacobi a fait la découverte,

savoir :

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 - q^4 - q^8 + q^{20} + \ldots}{1 + q - q^2 - q^5 - \ldots} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^m q^{6m^2+2m}}{\sum (-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)} q^{\frac{1}{2}(3m^2+m)}},$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \ldots}{1 + q + q^3 + q^6 + \ldots} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{4m^2+2m}}{\sum q^{2m^2+m}},$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 - q - q^3 + q^6 + \ldots}{1 - 2q + 2q^8 - 2q^{18} + \ldots} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^m q^{2m^2+m}}{\sum (-1)^m q^{2m^2}},$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1 + q + q^3 + q^6 + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{2m^2+m}}{\sum q^{m^2}};$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - \ldots}{1 + q - q^2 - q^5 - q^7 - q^{12} + \ldots} = \frac{\sum (-1)^m q^{\frac{1}{2}(3m^2+m)}}{\sum (-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)} q^{\frac{1}{2}(3m^2+m)}},$$

$$= \frac{1 - q - q^3 + q^6 + q^{10} - \ldots}{1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \ldots} = \frac{\sum (-1)^m q^{2m^2+m}}{\sum q^{2m^2+m}},$$

$$= \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \ldots} = \frac{\sum (-1)^m q^{m^2}}{\sum (-1)^m q^{2m^2}},$$

$$= \frac{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots} = \frac{\sum (-1)^m q^{2m^2}}{\sum q^{m^2}}.$$

En posant

$$q = e^{i\pi\omega},$$

nous désignerons $\sqrt[4]{k}$ par $\varphi(\omega)$ et $\sqrt[4]{k'}$ par $\psi(\omega)$. Relativement à cette variable ω, on aura ainsi des fonctions affranchies de l'ambiguïté qui tient au facteur $\sqrt[8]{q}$, et dont je vais en peu de mots indiquer les propriétés fondamentales. Elles découlent des relations

suivantes, dont la démonstration est immédiate, savoir :

$$\varphi^8(\omega) + \psi^8(\omega) = 1,$$

$$\varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \psi(\omega),$$

$$\varphi(\omega + 1) = e^{\frac{i\pi}{8}} \frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)},$$

$$\psi(\omega + 1) = \frac{1}{\psi(\omega)}.$$

On en déduit que $\varphi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right)$ et $\psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right)$ s'expriment simplement en $\varphi(\omega)$ et $\psi(\omega)$, a, b, c, d étant des nombres entiers quelconques assujettis à la seule condition

$$ad - bc = 1.$$

Les relations auxquelles on parvient de la sorte ayant une grande importance, non seulement pour l'objet que nous avons présentement en vue, mais pour la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique, je vais les indiquer en me bornant, pour abréger, aux valeurs de $\varphi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right)$. J'observe à cet effet que la congruence

$$ad - bc \equiv 1 \pmod 2$$

est susceptible de six solutions distinctes renfermées dans ce Tableau :

	a	b	c	d
I.	1	0	0	1
II.	0	1	1	0
III.	1	1	0	1
IV.	1	1	1	0
V.	1	0	1	1
VI.	0	1	1	1

et d'où résultent autant de formes différentes pour les expressions $\frac{c+d\omega}{a+b\omega}$. Cela posé, nous aurons suivant chacun de ces six cas ces équations

$$\text{(I)} \qquad \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \varphi(\omega)\, e^{\frac{i\pi}{8}[d(c+d)-1]},$$

$$\text{(II)} \qquad \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \psi(\omega)\, e^{\frac{i\pi}{8}[c(c-d)-1]},$$

$$\text{(III)} \qquad \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{1}{\varphi(\omega)}\, e^{\frac{i\pi}{8}[d(d-c)-1]},$$

$$\text{(IV)} \qquad \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{1}{\psi(\omega)}\, e^{\frac{i\pi}{8}[c(c+d)-1]},$$

$$\text{(V)} \qquad \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)}\, e^{\frac{i\pi}{8}cd},$$

$$\text{(VI)} \qquad \varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{\psi(\omega)}{\varphi(\omega)}\, e^{-\frac{i\pi}{8}cd}.$$

Nous rappellerons encore cette propriété fondamentale, qu'en désignant par n un nombre premier et posant

$$v = \varphi(n\omega), \qquad u = \varphi(\omega),$$

v et u sont liés par une équation de degré $n+1$, qui présente ainsi un type nouveau d'équations algébriques dont les racines se séparent analytiquement par l'introduction d'une nouvelle variable. En désignant, en effet, par ε un nombre qui soit 1 ou -1, suivant que 2 est résidu ou non-résidu quadratique par rapport à n, les $n+1$ racines u seront

$$\varepsilon\varphi(n\omega) \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{\omega+16m}{n}\right),$$

m étant un nombre entier pris suivant le module n [1]. Mais, sans insister ici sur les autres propriétés remarquables des équations modulaires, je m'attacherai seulement au fait si important annoncé par Galois, et qui consiste en ce qu'elles sont susceptibles d'un

---

[1] La détermination de ε a été donnée par M. Sohnke dans un excellent travail publié dans le Tome 16 du *Journal de Crelle* sous le titre : *Æquationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum.*

abaissement au degré inférieur d'une unité dans les cas de

$$n = 5, \qquad n = 7 \qquad \text{et} \qquad n = 11.$$

Bien que nous ne possédions que quelques fragments de ses travaux sur cette question, il n'est pas difficile, en suivant la voie qu'il a ouverte, de retrouver la démonstration de cette belle proposition; mais on n'arrive ainsi qu'à s'assurer de la possibilité de la réduction, et une lacune importante restait à remplir pour pousser la question jusqu'à son dernier terme [1]. Après des tentatives qui remontent à une époque déjà éloignée, j'ai trouvé que dans le cas de l'équation modulaire du sixième degré

$$u^6 - v^5 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0,$$

on y parvenait aisément en considérant la fonction suivante :

$$\Phi(\omega) = \left[\varphi(5\omega) + \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega + 16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega + 4.16}{5}\right)\right]$$
$$\times \left[\varphi\left(\frac{\omega + 2.16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega + 3.16}{5}\right)\right].$$

Effectivement, les quantités

$$\Phi(\omega), \quad \Phi(\omega + 16), \quad \Phi(\omega + 2.16), \quad \Phi(\omega + 3.16), \quad \Phi(\omega + 4.16)$$

sont les racines d'une équation du cinquième degré dont les coefficients contiennent rationnellement $\varphi(\omega)$, savoir :

$$\Phi^5 - 2^4.5^3\,\Phi\varphi^4(\omega)\psi^{16}(\omega) - 2^6\sqrt{5^5}\,\varphi^3(\omega)\psi^{16}(\omega)[1 + \varphi^8(\omega)] = 0.$$

Or on voit qu'on ramène cette équation à celle de M. Jerrard en faisant simplement

$$\Phi = \sqrt[4]{2^4 5^3}\,\varphi(\omega)\psi^4(\omega)x,$$

car il vient par là

$$x^5 - x - \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\,\frac{1 + \varphi^8(\omega)}{\varphi^2(\omega)\psi^4(\omega)} = 0.$$

---

[1] Postérieurement à mes premières recherches restées inédites, mais dont les résultats avaient été annoncés (*Œuvres de Jacobi*, t. II, p. 249), un géomètre italien distingué, M. Betti, a publié un travail sur le même sujet dans les *Annales de M. Tortolini*.

Donc, il ne restera plus, pour arriver à l'expression des racines de l'équation

$$x^5 - x - a = 0$$

par la fonction $\Phi(\omega)$, qu'à déterminer ω ou plutôt $\varphi(\omega)$ par la condition suivante :

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \frac{1 + \varphi^8(\omega)}{\varphi^2(\omega)\psi^4(\omega)} = a.$$

Soit, pour simplifier,

$$A = \frac{\sqrt[4]{5^5}}{2} a,$$

et prenons pour inconnue $\varphi^4(\omega)$ ou le module k lui-même de l'intégrale elliptique; on parviendra à une équation du quatrième degré

$$k^4 + A^2 k^3 + 2k^2 - A^2 k + 1 = 0,$$

qui est susceptible d'une solution analytique sous le point de vue précisément où nous sommes placé en ce moment, car, en faisant

$$\frac{4}{A^2} = \sin\alpha,$$

on trouvera ces expressions des racines

$$k = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{4}, \quad \operatorname{tang}\frac{\alpha + 2\pi}{4}, \quad \operatorname{tang}\frac{\pi - \alpha}{4}, \quad \operatorname{tang}\frac{3\pi - \alpha}{4}.$$

Faisant choix de l'une d'elles pour module, afin d'en déduire la valeur correspondante de ω, on aura, pour les racines de l'équation de M. Jerrard, ces valeurs de x

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \frac{\Phi(\omega)}{\varphi(\omega)\psi^4(\omega)}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \frac{\Phi(\omega + 16)}{\varphi(\omega)\psi^4(\omega)}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \frac{\Phi(\omega + 2.16)}{\varphi(\omega)\psi^4(\omega)},$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \frac{\Phi(\omega + 3.16)}{\varphi(\omega)\psi^4(\omega)}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \frac{\Phi(\omega + 4.16)}{\varphi(\omega)\psi^4(\omega)}.$$

C'est donc la résolution de l'équation, en tant que les racines se trouvent représentées séparément par des fonctions uniformes. Quant au calcul numérique, la convergence extraordinaire des séries qui figurent au numérateur et au dénominateur de $\varphi(\omega)$ le rendra très court, même dans le cas où q sera imaginaire, car on

sait que son module peut toujours être abaissé au-dessous de la limite $e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}} = 0,0658$. On peut aussi faire le développement suivant les puissances ascendantes de q, ce qui donne, en posant pour simplifier $q^{\frac{1}{5}} = \mathfrak{q}$,

$$\Phi(\omega) = \sqrt{2^3 5}\,\sqrt[8]{\mathfrak{q}^3}(1 + \mathfrak{q} - \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{q}^3 - 8\mathfrak{q}^5 - 9\mathfrak{q}^6 + 8\mathfrak{q}^7 - 9\mathfrak{q}^8 + \ldots),$$

et l'on trouverait, pour le carré et le cube de $\Phi(\omega)$,

$$\Phi^2(\omega) = 2^3 5\,\sqrt[4]{\mathfrak{q}^3}(1 + 2\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^2 + 3\mathfrak{q}^4 - 18\mathfrak{q}^5 - 33\mathfrak{q}^6 + 14\mathfrak{q}^7 + \ldots),$$
$$\Phi^3(\omega) = \sqrt{2^9 5^3}\,\sqrt[8]{\mathfrak{q}^9}(1 + 3\mathfrak{q} - 2\mathfrak{q}^3 + 6\mathfrak{q}^4 - 24\mathfrak{q}^5 - 79\mathfrak{q}^6 + \ldots).$$

La première des séries entre parenthèses manque des puissances de $\mathfrak{q}$ dont l'exposant est $\equiv 4$, mod 5, la deuxième et la troisième des puissances dont les exposants sont respectivement $\equiv 3$ et $\equiv 2$, mod 5. D'ailleurs le changement de ω en $\omega + 16m$ reviendra à multiplier la quantité $\mathfrak{q}$ par les diverses racines cinquièmes de l'unité.

J'observerai enfin que le système des cinq fonctions $\Phi(\omega + 16m)$ possède, par rapport aux substitutions $\frac{c + d\omega}{a + b\omega}$ qui appartiennent à la première classe, des propriétés toutes semblables à celles de $\varphi(\omega)$. Effectivement, en faisant, pour abréger,

$$\Phi(\omega + 16m) = \Phi_m(\omega),$$

on trouvera, par exemple,

$$\Phi_m(\omega + 2a) = \Phi_{m+2a}(\omega)\, e^{-\frac{i\pi a}{4}},$$
$$\Phi_m\left(\frac{\omega}{1 + 2a\omega}\right) = \Phi_{4a^3+m+2am^2+3a^2m^3}(\omega);$$

l'indice du troisième degré en m étant pris suivant le module 5.

Dans l'une des prochaines séances, j'aurai l'honneur de présenter à l'Académie les résultats analogues aux précédents et auxquels je suis parvenu, pour la réduction de l'équation modulaire du huitième degré au septième et de l'équation modulaire du douzième degré au onzième.

LETTRE DE CHARLES HERMITE A M. JULES TANNERY

SUR LES FONCTIONS MODULAIRES [1].

« Saint-Jean-de-Luz, villa Bel-air, 24 septembre 1900.

» Mon cher ami,

» Je viens dégager ma parole et m'acquitter bien tardivement, il me faut l'avouer, de ma promesse de vous démontrer les formules concernant les quantités $\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)$ données dans mon ancien article *Sur l'équation du cinquième degré*.

» Le bon air de la mer m'a aidé à surmonter la torpeur qui faisait obstacle à mon travail; j'en profite pour échapper aux remords de ma conscience, et, en pensant que vous avez sous les yeux cet article, j'aborde comme il suit la question.

» Mon point de départ se trouve dans les formules de la page 2 et de la page 3, qui donnent les expressions de $\sqrt[4]{k}$ et de $\sqrt[4]{k'}$ comme fonctions uniformes de q, ou plutôt de ω, en posant $\omega = \frac{iK'}{K}$, et, parmi ces formules d'une extrême importance dont la découverte est due à Jacobi, j'envisagerai pour mon objet la suivante, à savoir :

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 + \ldots}{1 - 2q^2 + 2q^8 + \ldots} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{n^2}}{\Sigma(-1)^n q^{2n^2}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

[1] Nous reproduisons une Lettre d'Hermite à M. Jules Tannery, où se trouve la démonstration des formules seulement énoncées dans l'article qui précède sur l'équation du cinquième degré. Cette Lettre a déjà été publiée par MM. Tannery et Molk dans leur *Traité sur la théorie des fonctions elliptiques*, en intercalant quelques explications complémentaires avec renvois à certaines parties du *Traité*. Nous donnons ici le texte même de la Lettre d'Hermite que M. Tannery a bien voulu nous communiquer, en corrigeant seulement de légères inadvertances.

E. P.

» J'y introduirai tout d'abord la quantité ω, en me servant, au lieu des fonctions Θ, H, .., de la série

$$\theta_{\mu,\nu}(x) = \Sigma(-1)^{n\nu} e^{i\pi\left[(2n+\mu)x + \frac{\omega}{4}(2n+\mu)^2\right]} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

[*voir* mon article *Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques* (*Journ. de Liouville*, 1858)], et j'écrirai

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{\theta_{0,1}(0|\omega)}{\theta_{0,1}(0|2\omega)},$$

ou plus simplement

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{\theta_{0,1}(\omega)}{\theta_{0,1}(2\omega)}.$$

J'ai posé, comme vous savez,

$$\sqrt[4]{k} = \varphi(\omega), \qquad \sqrt[4]{k'} = \psi(\omega):$$

on aura donc

$$\psi\left(\frac{c-d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{\theta_{0,1}\left(\frac{c-d\omega}{a+b\omega}\right)}{\theta_{0,1}\left(2\frac{c-d\omega}{a+b\omega}\right)}.$$

Dans cette égalité, a, b, c, d désignent des entiers assujettis à la condition $ad - bc = 1$; je ferai la supposition qu'ils appartiennent au premier cas (page 4), où b et c sont pairs, a et d impairs, et je ferai

$$b = 2b', \qquad 2c = c';$$

nous aurons ainsi

$$\psi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{\theta_{0,1}\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)}{\theta_{0,1}\left(\frac{c'+d.2\omega}{a+b'.2\omega}\right)},$$

et, comme nous conservons la condition $ad - b'c' = 1$, la question se trouve ramenée à celle qui concerne la transformation de la fonction $\theta_{\mu,\nu}(x)$. Dans l'article cité tout à l'heure, j'ai obtenu les résultats suivants, dont je vais maintenant faire usage.

» Soit en général, pour des valeurs quelconques de a, b, c, d,

$$\mu_1 = a\mu + b\nu + ab,$$
$$\nu_1 = c\mu + d\nu + cd.$$
$$\delta = e^{-\frac{i\pi}{4}(ac\mu^2 + 2bc\mu\nu + bd\nu^2 + 2abc\mu + 2abd\nu + ab^2c)};$$

puis, en supposant b positif,

$$S = \Sigma e^{-\frac{i\pi a}{b}\left(\rho - \frac{1}{2}b\right)^2} \qquad (\rho = 0, 1, 2, \ldots, b-1),$$

$$T = \frac{S\delta}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}},$$

le signe de la racine carrée étant pris de manière que sa partie réelle soit positive. Nous aurons l'égalité

$$\theta_{\mu,\nu}[(a+b\omega)x, \omega]\, e^{i\pi b(a+b\omega)x^2} = T\theta_{\mu_1,\nu_1}\left(x.\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right),$$

et nous en concluons, pour $x = 0$,

$$\theta_{\mu,\nu}(\omega) = T\theta_{\mu_1,\nu_1}\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right).$$

» La condition de b positif peut toujours s'obtenir en changeant, comme il est permis, le signe des quatre entiers a, b, c, d. Cela étant, la somme S s'exprime comme il suit, au moyen du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ de la théorie des résidus quadratiques.

» Supposons que b soit pair. Je ferai $b = 2^k b_1$, b_1 étant impair, et l'on aura, suivant que l'exposant k est pair ou impair,

$$S = \sqrt{b}\left(\frac{-a}{b_1}\right) e^{\frac{i\pi}{8}[a^2+1+3(ab_1+1)^2+(b_1-1)^2]},$$

ou bien

$$S = \sqrt{b}\left(\frac{-a}{b_1}\right) e^{\frac{i\pi}{8}[3(ab_1+1)^2+(b_1-1)^2]}.$$

» Je vais faire, en entrant dans tous les détails du calcul, l'application de ces formules aux quantités

$$\theta_{0,1}\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) \qquad \text{et} \qquad \theta_{0,1}\left(\frac{c'+d.2\omega}{a+b'.2\omega}\right).$$

Je supposerai qu'on ait

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 0, \quad d \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Ce sera donc le premier des six cas qu'il faudra considérer; nous verrons bientôt que tous les autres s'en déduisent immédiatement.

» Soient d'abord $\mu = 0$, $\nu = 1$. Des deux nombres

$$\mu_1 = b + ab,$$
$$\nu_1 = d + cd,$$

le premier est pair, et même multiple de 4, le second est impair. Ayant donc en général

$$\theta_{2\mu,2\nu+1}(x,\omega) = (-1)^{\mu}\,\theta_{0,1}(x,\omega),$$

nous en concluons l'égalité

$$\theta_{0,1}(\omega) = \mathrm{T}.\theta_{0,1}\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right).$$

» J'ajoute qu'on peut mettre sous une forme plus simple la quantité

$$\delta = e^{-\frac{i\pi}{4}(bd+2abd+ab^2c)}$$

qui entre dans la valeur du facteur

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{S}\delta}{\sqrt{-ib(a+b\omega)}}.$$

Des hypothèses faites sur les entiers a, b, c, d résulte, en effet, la congruence

$$bd + 2abd + ab^2c \equiv -bd \qquad (\mathrm{mod}\ 8),$$

ce qui permet d'écrire

$$\delta = e^{\frac{i\pi}{4}bd}.$$

» Si nous passons ensuite à la quantité $\theta_{0,1}\left(\frac{c'+d.2\omega}{a+b'.2\omega}\right)$, où $b' = \frac{b}{2}$ et $c' = 2c$ remplacent b et c, a et d ne changeant pas, on a

$$\mu_1 = b' + ab',$$
$$\nu_1 = d + c'd;$$

le premier de ces deux nombres est encore pair et le second impair, mais μ_1 n'est pas nécessairement divisible par 4, et, par conséquent, on a l'égalité

$$\theta_{0,1}(2\omega) = (-1)^{\frac{b'+ab'}{2}}\,\mathrm{T}'.\theta_{0,1}\left(\frac{c'+d.2\omega}{a+b'.2\omega}\right),$$

où T′ représente ce que devient, dans ce second cas, le facteur T.

» Désignons aussi par δ' et S′ les nouvelles valeurs de δ et de S; on aura

$$\mathrm{T}' = \frac{\mathrm{S}'\delta'}{\sqrt{-ib'(a+b'.2\omega)}},$$

c'est-à-dire

$$T' = \frac{S'\delta'}{\sqrt{-\frac{1}{2}ib(a+b\omega)}},$$

et nous en concluons

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{2}\,\frac{S'\delta'}{S\delta}.$$

» Je m'arrêterai à cette formule, et je remarquerai en premier lieu que, en passant de S à S', le nombre b est remplacé par $\frac{b}{2}$. Il en résulte que, ayant posé $b = 2^k b_1$, l'exposant k varie de l'une à l'autre d'une unité. Cela étant, la comparaison des valeurs de S et de S' nous donne l'égalité

$$S' = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-1)}\, S,$$

d'où résulte

$$\frac{T'}{T} = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-1)}\,\delta'}{\delta}.$$

» Ceci posé, écrivons le facteur $(-1)^{\frac{b'+ab'}{2}}$ sous la forme $e^{\frac{i\pi}{4}(b+ab)}$, et employons l'expression de δ', à savoir :

$$\delta' = e^{-\frac{i\pi}{4}(b'd+2ab'd+ab'^2c')} = e^{-\frac{i\pi}{8}(bd+2abd+ab^2c)}:$$

on aura ainsi

$$(-1)^{\frac{b'+ab'}{2}}\,\frac{T'}{T} = e^{\frac{i\pi}{8}[a^2-1+2b(1+a)-3bd-2abd-ab^2c]}.$$

» Or, on vérifie facilement la congruence suivante :

$$\text{(A)} \qquad 2b(1+a) - 3bd - 2abd - ab^2c \equiv -ab \qquad (\text{mod } 16),$$

faisant, en effet, passer tous les termes dans un même membre et divisant par b, qui est pair, elle peut s'écrire

$$2(1-ad) + 3(a-d) - abc \equiv 0 \qquad (\text{mod } 8),$$

puis, d'après la condition $ad - bc = 1$,

$$-2bc + 3(a-d) - a(ad-1) \equiv 0 \qquad (\text{mod } 8);$$

mais, b et c étant pairs et a impair, on a

$$2bc \equiv 0, \qquad a^2 \equiv 1 \qquad (\text{mod } 8);$$

elle deviendra donc simplement

$$4(a-d) \equiv 0 \qquad (\text{mod } 8),$$

ce qui a lieu, en effet, a et d étant impairs. Nous avons, en conséquence,

$$(-1)^{\frac{b'+ab'}{2}}\frac{T'}{T}=e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-ab-1)}.$$

» Nous obtenons ensuite, au moyen de l'expression qui a été notre point de départ,

$$\psi(\omega)=\frac{\theta_{0,1}(\omega)}{\theta_{0,1}(2\omega)},$$

la relation fondamentale

$$\text{(I)}\qquad \psi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)=\psi(\omega)\,e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-ab-1)}.$$

» On en tire les deux systèmes de formules concernant les fonctions $\varphi(\omega)$ et $\psi(\omega)$ pour tous les cas que présentent les entiers a, b, c, d, pris selon le module 2. Ces cas sont indiqués dans le Tableau suivant, que j'ai donné dans mon article *Sur l'Équation du cinquième degré* :

	a	b	c	d
I.....	1	0	0	1
II.....	0	1	1	0
III.....	1	1	0	1
IV.....	1	1	1	0
V.....	1	0	1	1
VI.....	0	1	1	1

» En premier lieu, je change, dans l'équation (I), ω en $-\frac{1}{\omega}$ et a, b, c, d en b, $-a$, d, $-c$; on trouve ainsi

$$\text{(II)}\qquad \psi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)=\varphi(\omega)\,e^{\frac{i\pi}{8}(b^2+ab-1)}.$$

» Dans la même équation, je remplace ensuite ω par $\omega - 1$, a et c par $a + b$ et $c + d$; il vient

$$\text{(V)} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \frac{1}{\psi(\omega)} e^{\frac{i\pi}{8}(a^2+ab-1)}.$$

Passant à l'équation (II), je change ω en $\omega + 1$, a et c en $a - b$ et $c - d$, ce qui donne

$$\text{(IV)} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)} e^{\frac{i\pi}{8}ab}.$$

» Je continue en remplaçant, dans (V), ω par $-\frac{1}{\omega}$ et a, b, c, d par b, $-a$, d, $-c$, et j'obtiens

$$\text{(VI)} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \frac{1}{\varphi(\omega)} e^{\frac{i\pi}{8}(b^2-ab-1)}.$$

» Pour avoir le système complet des formules cherchées, il ne me reste plus qu'à changer dans cette équation ω en $\omega - 1$, a et c en $a + b$ et $c + d$; on a ainsi

$$\text{(III)} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \frac{\psi(\omega)}{\varphi(\omega)} e^{-\frac{i\pi}{8}ab},$$

en employant l'égalité

$$\varphi(\omega - 1) = e^{-\frac{i\pi}{8}} \frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)}.$$

» Voici maintenant les résultats réunis et mis en regard des six cas énumérés dans le Tableau précédent :

$$\text{I.} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \psi(\omega) e^{\frac{i\pi}{8}(a^2-ab-1)},$$

$$\text{II.} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \varphi(\omega) e^{\frac{i\pi}{8}(b^2+ab-1)},$$

$$\text{III.} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \frac{\psi(\omega)}{\varphi(\omega)} e^{-\frac{\pi}{8}ab},$$

$$\text{IV.} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)} e^{\frac{i\pi}{8}ab},$$

$$\text{V.} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \frac{1}{\psi(\omega)} e^{\frac{i\pi}{8}(a^2+ab-1)},$$

$$\text{VI.} \qquad \psi\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right) = \frac{1}{\varphi(\omega)} e^{\frac{i\pi}{8}(b^2-ab-1)}.$$

» J'ai à y joindre enfin les formules qui concernent la fonction $\varphi(\tau)$. Je remplacerai à cet effet a, b, c, d par $-c$, $-d$, a, b; on change ainsi

$$\psi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)$$

en

$$\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right)$$

et aux divers cas

(I), (II), (III), (IV), (V), (VI),

se substituent ceux-ci

(II), (I), (VI), (V), (IV), (III).

» Nous avons ainsi ce second système de relations

I. $$\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \varphi(\omega)\, e^{\frac{i\pi}{8}(d^2+cd-1)},$$

II. $$\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \psi(\omega)\, e^{\frac{i\pi}{8}(c^2-cd-1)},$$

III. $$\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{1}{\varphi(\omega)}\, e^{\frac{i\pi}{8}(d^2-cd-1)},$$

IV. $$\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{1}{\psi(\omega)}\, e^{\frac{i\pi}{8}(c^2+cd-1)},$$

V. $$\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)}\, e^{\frac{i\pi}{8}cd},$$

VI. $$\varphi\left(\frac{c+d\omega}{a+b\omega}\right) = \frac{\psi(\omega)}{\varphi(\omega)}\, e^{-\frac{i\pi}{8}cd}.$$

» J'observe enfin que les deux séries de formules établies, dans le cas où b est positif, subsistent dans tous les cas, comme on le voit en changeant a, b, c, d en $-a$, $-b$, $-c$, $-d$.

» Ce sont bien les résultats que j'ai indiqués et dont je me reproche d'avoir tant tardé à vous donner la démonstration que vous m'avez demandée [1]. Mais cette démonstration, je dois le reconnaître, *opere peracto,* ne me contente point : elle est longue, in-

[1] Les formules précédentes n'ont pas toutes la même forme que les formules de la Note sur l'équation du cinquième degré (p. 9 de ce volume), mais elles se ramènent à celles-ci si l'on tient compte des congruences auxquelles satisfont les entiers a, b, c, d. E. P.

directe surtout; elle repose en entier sur le hasard d'une formule de Jacobi, oubliée et comme perdue parmi tant de découvertes dues à son génie. Je vous l'envoie, mon cher ami, *valeat quantum,* en vous informant que je serai revenu dans quelques jours, et à votre disposition pour tout ce que vous aurez à me demander. Et nous causerons aussi d'autre chose que d'Analyse, nous argumenterons, nous nous disputerons. De ma proximité de l'Espagne je rapporte des cigarettes d'Espagnoles; si vous ne venez pas en fumer avec votre collaborateur d'aujourd'hui, votre professeur d'autrefois, c'est que vous avez le cœur d'un tigre.

» *Totus tuus et toto corde.*

» CH. HERMITE. »