



Pierre Burg

CAPES EXTERNE  
AGRÉGATION INTERNE  
MATHÉMATIQUES

# Algèbre et géométrie

## CAPES et Agrégation

- Conforme au nouveau programme
- Cours complet
- Plus de 200 exercices corrigés

Vuibert



# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>XIII</b>
<b>1 Nombres complexes</b>	<b>1</b>
1.1 Corps des nombres complexes . . . . .	1
1.1.1 Représentation géométrique . . . . .	2
1.2 Interprétation géométrique . . . . .	3
1.3 Racines carrées dans $\mathbb{C}$ . . . . .	5
1.4 Équation de degré 2 . . . . .	6
1.5 Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}$ . . . . .	6
1.6 Exponentielle d'un complexe . . . . .	7
1.6.1 Propriétés de l'argument . . . . .	12
1.7 Racines $n$ -ièmes . . . . .	12
1.8 Géométrie et complexes . . . . .	13
1.8.1 Similitude . . . . .	14
1.9 Exercices . . . . .	16
1.10 Corrigé des exercices . . . . .	19
<b>2 Structures algébriques usuelles</b>	<b>27</b>
2.1 Groupes . . . . .	27
2.2 Sous-groupe . . . . .	29
2.2.1 Sous-groupe d'un groupe fini . . . . .	30
2.3 Morphisme de groupes . . . . .	31
2.3.1 Noyau et image d'un morphisme de groupes . . . . .	32
2.4 Sous-groupe engendré par une partie . . . . .	33
2.4.1 Théorème fondamental . . . . .	33
2.4.2 Groupe monogène . . . . .	34
2.4.3 Ordre d'un élément . . . . .	36
2.5 Groupe symétrique . . . . .	38
2.5.1 Signature . . . . .	40
2.6 Anneau . . . . .	41
2.6.1 Propriétés de calcul dans un anneau . . . . .	42
2.6.2 Formule du binôme . . . . .	43
2.6.3 Éléments inversibles . . . . .	44
2.6.4 Diviseurs de zéro . . . . .	45
2.6.5 Sous-anneau . . . . .	46

2.7	Morphisme d'anneaux . . . . .	46
2.8	Idéal d'un anneau commutatif . . . . .	47
2.8.1	Divisibilité dans un anneau commutatif intègre . . . . .	49
2.8.2	Arithmétique de $\mathbb{Z}$ revisitée . . . . .	50
2.8.3	Relation de Bézout . . . . .	50
2.9	Corps . . . . .	51
2.9.1	Sous-corps . . . . .	51
2.10	Anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ . . . . .	52
2.10.1	Théorème d'Euler . . . . .	53
2.10.2	Théorème chinois . . . . .	54
2.11	Algèbre . . . . .	56
2.12	Exercices . . . . .	57
2.13	Corrigé des exercices . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs</b>	<b>69</b>
3.1	Anneau $\mathbb{Z}$ . . . . .	69
3.1.1	Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ . . . . .	69
3.2	Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ . . . . .	70
3.2.1	Division euclidienne . . . . .	70
3.2.2	Caractérisation des sous-groupes additifs . . . . .	71
3.3	Idéal . . . . .	72
3.4	Divisibilité . . . . .	73
3.4.1	Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ . . . . .	73
3.5	Congruence . . . . .	74
3.5.1	Compatibilité de la congruence avec les opérations . . . . .	75
3.5.2	Groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	77
3.5.3	Produit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	77
3.6	PGCD et PPCM . . . . .	78
3.6.1	Plus grand commun diviseur dans $\mathbb{N}$ . . . . .	78
3.6.2	Entiers premiers entre eux . . . . .	83
3.6.3	Équation diophantienne $ax + by = c$ . . . . .	86
3.6.4	Plus petit commun multiple dans $\mathbb{N}$ . . . . .	91
3.6.5	Plus grand commun diviseur de plusieurs entiers . . . . .	94
3.7	Nombres premiers . . . . .	95
3.7.1	Le corps $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ . . . . .	96
3.7.2	Petit théorème de Fermat . . . . .	97
3.7.3	Théorème de Wilson . . . . .	98
3.7.4	Décomposition primaire . . . . .	98
3.8	Exercices . . . . .	101
3.9	Corrigé des exercices . . . . .	104
<b>4</b>	<b>Polynômes</b>	<b>115</b>
4.1	Définitions et structures . . . . .	115
4.2	Degré d'un polynôme . . . . .	118
4.3	Composition de polynômes . . . . .	120
4.4	Divisibilité dans $\mathbb{K}_n[X]$ . . . . .	121
4.4.1	Division euclidienne . . . . .	123

4.4.2	Idéaux de $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	125
4.5	Fonction polynomiale . . . . .	126
4.6	Racines d'un polynôme . . . . .	127
4.6.1	Racines . . . . .	127
4.6.2	Racines multiples . . . . .	132
4.6.3	Relations entre les coefficients et les racines . . . . .	135
4.7	Dérivation . . . . .	137
4.7.1	Dérivation et opérations . . . . .	138
4.7.2	Formule de Taylor . . . . .	139
4.7.3	Caractérisation de l'ordre d'une racine . . . . .	141
4.8	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	143
4.8.1	PGCD . . . . .	143
4.8.2	Algorithme d'Euclide . . . . .	144
4.8.3	Plus petit commun multiple . . . . .	146
4.8.4	Polynômes premiers entre eux . . . . .	148
4.9	Lien PGCD et PPCM . . . . .	150
4.10	Polynômes irréductibles . . . . .	150
4.10.1	Propriétés . . . . .	151
4.10.2	Décomposition en facteurs irréductibles . . . . .	152
4.10.3	Application au PGCD et au PPCM . . . . .	153
4.11	Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ . . . . .	154
4.11.1	Théorème de d'Alembert . . . . .	154
4.11.2	Polynôme conjugué . . . . .	155
4.12	Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	156
4.13	Polynôme d'interpolation de Lagrange . . . . .	157
	<b>Fractions rationnelles</b> . . . . .	<b>160</b>
4.14	Définition . . . . .	160
4.14.1	Structures de $\mathbb{K}(X)$ . . . . .	161
4.14.2	Représentant irréductible . . . . .	161
4.14.3	Conjugaison . . . . .	162
4.14.4	Composition avec un polynôme . . . . .	163
4.14.5	Dérivation . . . . .	165
4.15	Fonction rationnelle . . . . .	165
4.15.1	Fonction rationnelle définie par une fraction rationnelle . . . . .	166
4.16	Décomposition d'une fraction rationnelle . . . . .	168
4.16.1	Degré d'une fraction rationnelle . . . . .	168
4.16.2	Méthode . . . . .	169
4.17	Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ . . . . .	172
4.17.1	Mise en pratique . . . . .	173
4.18	Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ . . . . .	175
4.18.1	Méthode . . . . .	176
4.19	Décomposition de $\frac{P'}{P}$ . . . . .	179
4.20	Exercices . . . . .	179
4.21	Corrigé des exercices . . . . .	184

<b>5</b>	<b>Espace vectoriel : généralités</b>	<b>199</b>
5.1	Définition . . . . .	199
5.1.1	Sous-espace vectoriel . . . . .	200
5.1.2	Sous-espace engendré . . . . .	203
5.2	Application linéaire . . . . .	205
5.2.1	Structure de $\mathcal{L}(E, F)$ . . . . .	206
5.3	Noyau et image . . . . .	206
5.4	Somme directe . . . . .	209
5.4.1	Sous-espaces supplémentaires . . . . .	210
5.5	Anneau des endomorphismes . . . . .	212
5.5.1	Itérés d'un endomorphisme . . . . .	212
5.6	Endomorphismes remarquables . . . . .	214
5.6.1	Homothétie vectorielle . . . . .	214
5.6.2	Projection vectorielle . . . . .	214
5.6.3	Projecteur . . . . .	215
5.6.4	Symétrie vectorielle . . . . .	215
5.6.5	Affinité vectorielle . . . . .	217
5.6.6	Somme directe et projecteurs . . . . .	218
5.7	Exercices . . . . .	220
5.8	Corrigé des exercices . . . . .	222
<b>6</b>	<b>Espace vectoriel en dimension finie</b>	<b>229</b>
6.1	Famille génératrice . . . . .	229
6.2	Famille libre . . . . .	230
6.3	Base . . . . .	231
6.4	Dimension . . . . .	234
6.5	Sous-espace d'un espace de dimension finie . . . . .	237
6.6	Rang . . . . .	238
6.6.1	Théorème du rang . . . . .	239
6.6.2	Théorème d'isomorphisme . . . . .	239
6.6.3	Application : interpolation de Lagrange . . . . .	242
6.7	Formule de Grassmann . . . . .	243
6.8	Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ . . . . .	244
6.9	Formes linéaires . . . . .	245
6.9.1	Hyperplan . . . . .	245
6.9.2	Équation cartésienne d'un hyperplan . . . . .	248
6.9.3	Dualité en dimension finie . . . . .	249
6.9.4	Base duale . . . . .	249
6.9.5	Intersection d'hyperplans . . . . .	251
6.9.6	Base antéduale . . . . .	252
	<b>Géométrie affine</b>	<b>256</b>
6.10	Structure affine d'un espace vectoriel . . . . .	256
6.10.1	Translation . . . . .	257
6.11	Sous-espace affine d'un espace vectoriel . . . . .	258
6.11.1	Droites et plans affines de $\mathbb{R}^n$ , $n = 2$ ou $3$ . . . . .	261
6.11.2	Parallélisme . . . . .	262

6.12	Barycentre . . . . .	264
6.12.1	Associativité du barycentre . . . . .	268
6.12.2	Convexité . . . . .	270
6.13	Repère affine . . . . .	273
6.14	Exercices . . . . .	273
6.15	Corrigé des exercices . . . . .	279
<b>7</b>	<b>Matrice</b> . . . . .	<b>293</b>
7.1	Rappels et notations . . . . .	293
7.1.1	Matrice rectangle . . . . .	293
7.1.2	Somme de matrices et produit par un scalaire . . . . .	293
7.1.3	Produit de matrices . . . . .	294
7.1.4	Matrice carrée . . . . .	295
7.1.5	Matrices carrées symétriques et antisymétriques . . . . .	297
7.2	Trace . . . . .	299
7.3	Rang d'une matrice . . . . .	300
7.3.1	Théorème du rang . . . . .	301
7.4	Matrices carrées inversibles . . . . .	301
7.4.1	Caractérisation de l'inversibilité . . . . .	302
7.5	Matrices par blocs . . . . .	305
7.6	Représentations matricielles . . . . .	306
7.6.1	Matrice d'un vecteur . . . . .	306
7.6.2	Matrice d'une application linéaire . . . . .	307
7.6.3	Application linéaire associée à une matrice . . . . .	309
7.7	Matrice de changement de base . . . . .	310
7.7.1	Action du changement de base sur un vecteur . . . . .	310
7.7.2	Action du changement de base sur une application linéaire . . . . .	311
7.8	Matrices équivalentes . . . . .	312
7.9	Matrices semblables . . . . .	313
7.10	Opérations élémentaires . . . . .	315
7.10.1	Transvections . . . . .	315
7.10.2	Dilatations . . . . .	316
7.10.3	Matrice de permutation . . . . .	317
7.11	Systèmes d'équations linéaires . . . . .	318
7.11.1	Résolution . . . . .	319
7.11.2	Traduction matricielle . . . . .	319
7.11.3	Méthode pratique . . . . .	320
7.11.4	Système de Cramer . . . . .	321
7.12	Exercices . . . . .	321
7.13	Corrigé des exercices . . . . .	325
<b>8</b>	<b>Déterminant</b> . . . . .	<b>339</b>
8.1	Applications multilinéaires . . . . .	339
8.2	Déterminant de $n$ vecteurs . . . . .	343
8.2.1	Relation de Chasles . . . . .	344
8.3	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	346
8.4	Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	347

8.5	Déterminant d'une matrice par blocs . . . . .	350
8.6	Développement d'un déterminant . . . . .	352
8.7	Vecteurs linéairement indépendants . . . . .	355
8.8	Rang d'une matrice . . . . .	356
8.9	Systèmes linéaires . . . . .	357
8.9.1	Systèmes de Cramer . . . . .	358
8.9.2	Formules de Cramer . . . . .	359
8.9.3	Cas général . . . . .	359
8.10	Orientation d'un espace vectoriel réel . . . . .	360
8.11	Produit mixte . . . . .	362
8.12	Produit vectoriel . . . . .	363
8.13	Exercices . . . . .	365
8.14	Corrigé des exercices . . . . .	368
<b>9</b>	<b>Réduction des endomorphismes</b> . . . . .	<b>383</b>
9.1	Sous-espaces vectoriels stables . . . . .	383
9.1.1	Application aux matrices . . . . .	384
9.2	Polynôme d'endomorphisme . . . . .	385
9.2.1	Cas des sous-espaces stables . . . . .	387
9.3	Polynôme minimal . . . . .	388
9.4	Lemme de décomposition des noyaux . . . . .	390
9.4.1	Application aux équations différentielles . . . . .	392
9.5	Éléments propres d'un endomorphisme . . . . .	394
9.6	Polynôme caractéristique . . . . .	398
9.6.1	Polynôme caractéristique et valeurs propres . . . . .	401
9.6.2	Ordre de multiplicité . . . . .	404
9.7	Théorème de Hamilton-Cayley . . . . .	405
9.8	Valeurs propres et polynôme minimal . . . . .	406
9.9	Endomorphismes diagonalisables . . . . .	408
9.9.1	Applications de la diagonalisation . . . . .	411
9.9.2	Projecteurs spectraux . . . . .	413
9.9.3	Polynôme annulateur et diagonalisation . . . . .	415
9.9.4	Diagonalisation simultanée . . . . .	417
9.10	Trigonalisation . . . . .	418
9.10.1	Trigonalisation simultanée . . . . .	420
9.11	Sous-espaces caractéristiques . . . . .	422
9.11.1	Décomposition de Dunford . . . . .	422
9.12	Exercices . . . . .	423
9.13	Corrigé des exercices . . . . .	428
<b>10</b>	<b>Formes bilinéaires symétriques – Géométrie euclidienne</b> . . . . .	<b>445</b>
10.1	Définitions . . . . .	445
10.1.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	448
10.1.2	Inégalité de Minkowski . . . . .	449
10.2	Norme issue d'un produit scalaire . . . . .	450
10.2.1	Égalités de polarisation . . . . .	451
10.2.2	Égalité du parallélogramme . . . . .	452

10.3	Distance . . . . .	454
10.4	Vecteur unitaire . . . . .	454
10.5	Orthogonalité . . . . .	454
10.5.1	Théorème de Pythagore . . . . .	456
10.5.2	Procédé d'orthonormalisation de Schmidt . . . . .	457
10.5.3	Partie orthogonale . . . . .	459
10.5.4	Sous-espaces orthogonaux . . . . .	463
10.6	Hyperplan d'un espace euclidien . . . . .	463
10.6.1	Équation d'un hyperplan . . . . .	463
10.7	Représentation d'une forme linéaire . . . . .	464
10.8	Projection orthogonale . . . . .	465
10.8.1	Projection orthogonale sur un hyperplan affine . . . . .	468
10.8.2	Inégalité de Bessel . . . . .	470
10.8.3	Égalité de Parseval-Bessel . . . . .	471
10.9	Propriétés des projecteurs orthogonaux . . . . .	473
10.10	Symétrie orthogonale . . . . .	475
10.11	Endomorphismes orthogonaux . . . . .	477
10.11.1	Matrices orthogonales . . . . .	482
10.12	Endomorphisme symétrique . . . . .	485
10.13	Réduction des endomorphismes symétriques . . . . .	488
10.14	Norme d'un endomorphisme symétrique . . . . .	491
10.15	Forme bilinéaire et endomorphisme symétrique . . . . .	492
10.15.1	Matrice d'une forme bilinéaire symétrique . . . . .	492
	<b>Espace euclidien orienté</b> . . . . .	<b>495</b>
10.16	Rappels : espace vectoriel orienté . . . . .	495
10.16.1	Orientation d'un hyperplan . . . . .	496
10.17	Produit mixte . . . . .	496
10.18	Angle dans $E$ euclidien orienté de dimension 2, étude de $O(E)$ . . . . .	497
10.18.1	Angle orienté du plan orienté . . . . .	497
10.18.2	Étude de $O(2)$ . . . . .	498
10.19	Angle dans $E$ euclidien orienté de dimension 3, étude de $O(3)$ . . . . .	501
10.19.1	Produit vectoriel . . . . .	501
10.19.2	Double produit vectoriel . . . . .	504
10.19.3	Orientation dans $E$ euclidien de dimension 3, angle . . . . .	506
10.19.4	Orientation associée à un plan $P$ et à $P^\perp$ . . . . .	507
10.19.5	Interprétation géométrique du produit vectoriel . . . . .	507
10.19.6	Produit mixte et volume . . . . .	508
10.19.7	Étude de $O(E)$ . . . . .	508
10.19.8	Étude pratique d'une rotation . . . . .	510
10.20	Exercices . . . . .	513
10.21	Corrigé des exercices . . . . .	519



## Espace vectoriel : généralités

$\mathbb{K}$  désigne un corps commutatif  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $I$  désigne un ensemble non vide quelconque et  $n$  un entier non nul.

### 5.1 Définition

**Définition 5.1** Un ensemble  $E$  sur lequel on a défini une loi interne  $+$  et une loi externe  $\cdot$ , produit par un scalaire de  $\mathbb{K}$ , est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel si :

- $(E, +)$  est un groupe abélien.
- Pour tout  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbb{K}$  et pour tout  $x, y$  dans  $E$ ,

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, 1.x = x.$$

Les éléments de  $E$  sont appelés *vecteurs*, et l'élément neutre du groupe additif est le vecteur nul noté  $0$ .

**Remarque :** Il arrive qu'on surmonte les vecteurs d'une flèche, c'est le cas parfois du vecteur nul pour le distinguer du scalaire nul.

### Exemples 5.1

- L'ensemble des vecteurs de la géométrie de l'espace usuel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ; les opérations étant l'addition usuelle des vecteurs et le produit des vecteurs par un réel.
- L'ensemble des  $n$ -uplets  $\mathbb{K}^n$ ,  $n \geq 1$  muni de l'addition usuelle des  $n$ -uplets

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et du produit d'un  $n$ -uplet par un scalaire

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

est un espace vectoriel.

- L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , ainsi que l'ensemble des fonctions polynômes  $\mathbb{K}[x]$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions  $P$  définies sur

$\mathbb{K}$  par  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  pour tout  $x \in \mathbb{K}$ , où les coefficients  $a_k$  sont dans  $\mathbb{K}$ ,

sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

- Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  avec  $a_n \neq 0$ .

L'ensemble des fonctions réelles définies sur un intervalle  $I$ , solutions de l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

- L'ensemble des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions  $P$  définies par  $P(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$  pour tout réel  $x$  où les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  sont réels, est un espace vectoriel réel.
- L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  des matrices à  $n \geq 1$  lignes et  $p \geq 1$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- L'ensemble  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^I$  des applications d'une partie  $I$  non vide quelconque vers  $\mathbb{K}$ .
- Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathbb{L}$  un sous-corps de  $\mathbb{K}$  alors  $E$  est un  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel.
- Si  $E_1, \dots, E_n$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors  $E_1 \times \dots \times E_n$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois :

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda(x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Il est appelé *espace vectoriel produit*.

- Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $E \times E$ , on définit l'addition usuelle :

$$(x, x') + (y, y') = (x + x', y + y')$$

et la multiplication par les scalaires de  $\mathbb{C}$  :

$$(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

$E \times E$  muni de ces deux lois a une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  appelé le *complexifié de  $E$* .

### 5.1.1 Sous-espace vectoriel

**Définition 5.2** Une partie  $F$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si :

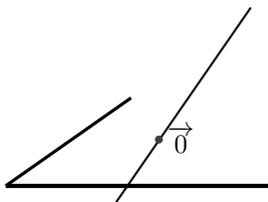
- $0_E \in F$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et tout  $x, y$  dans  $E$ ,  $x + y \in F$  et  $\lambda x \in F$ .

La seconde propriété dit que  $F$  est *stable par combinaison linéaire* et on peut la traduire par, pour tout  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{K}$  et tout  $x, y$  dans  $E$ ,  $\lambda x + \mu y \in F$ .

**Remarque :**

La partie de  $\mathbb{R}^3$  dont les éléments  $(x, y, z)$  vérifient  $ax + by + cz = 0$ , où  $a, b, c$  sont des réels donnés, est un sous-espace de l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3$ .

Géométriquement, dans l'espace affine usuel, muni d'un repère, les sous-espaces vectoriels sont les droites et les plans passant par l'origine.



**Théorème 5.3** *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.*

**Exemples 5.2** Soit  $H$  l'ensemble des suites réelles  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < +\infty$ .  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Démonstration**

- $H$  est non vide, la suite nulle étant clairement dans  $H$ .
- Soit  $X \in H$ , ce qui signifie que  $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et il existe  $A \in \mathbb{R}$

tel que  $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \leq A$ .

Soit  $Y \in H$ , ce qui signifie que  $Y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et il existe  $B \in \mathbb{R}$  tel que

$\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2 \leq B$ .

Sachant que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$

La suite  $X + Y = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie par addition d'inégalités, pour tout

entier  $n$ ,  $\sum_{k=0}^n (x_k + y_k)^2 \leq 2 \sum_{k=0}^n (x_k^2 + y_k^2) \leq 2(A + B)$ .

Par suite, la suite  $X + Y \in H$ .

- Soit  $X \in H$ , ce qui signifie que  $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que

$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \leq A$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

La suite  $\lambda X = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie, pour tout entier  $n$ ,

$$\sum_{k=0}^n (\lambda x_k)^2 = \lambda^2 \sum_{k=0}^n x_k^2 \leq \lambda A.$$

Par suite  $\lambda X \in H$ .

- $H$  est ainsi un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , donc aussi un espace vectoriel réel. □

**Définition 5.4**  $\mathbb{K}^{(I)}$  désigne le sous-ensemble de  $\mathbb{K}^I$  formé des éléments  $(\lambda_i)_{i \in I}$  à support fini, c'est-à-dire, tels que  $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$  est fini.

**Théorème 5.5**  $\mathbb{K}^{(I)}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Démonstration** Il suffit de montrer que  $\mathbb{K}^{(I)}$  est un sous-espace de  $\mathbb{K}^I$ .

$\mathbb{K}^{(I)}$  contient le vecteur nul de  $\mathbb{K}^I$ . On rappelle que le vecteur nul est la suite  $(x_i)_{i \in I}$  telle que  $\forall i \in I, x_i = 0$ . Cette suite est bien sûr à support fini.

Toute combinaison linéaire de deux familles à support fini est encore à support fini ; en effet le support est contenu dans la réunion des supports des deux familles.  $\square$

**Proposition 5.6** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Démonstration** Notons  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ .

- Le vecteur 0 appartient à  $F_i$  pour tout  $i \in I$ , donc  $0 \in F$ .
- Soient  $x \in F$  et  $y \in F$ , par suite  $\forall i \in I, x + y \in F_i$ , donc  $x + y \in F$ .
- Soient  $x \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , par suite  $\forall i \in I, \lambda x \in F_i$ , donc  $\lambda x \in F$ .

$\square$

**Exemples 5.3**  $n$  et  $p$  sont des entiers non nuls. Considérons le système linéaire homogène de  $n$  équations à  $p$  inconnues  $x_1, \dots, x_p$  dans  $\mathbb{K}$ , de coefficients  $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ , où  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$  :

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (S)$$

L'ensemble des solutions de  $(S)$  est un sous-espace de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^p$ . En effet,

pour tout entier  $i$ , l'ensemble  $F_i = \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mid \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j = 0 \right\}$  est un sous-

espace de  $\mathbb{K}^p$  et l'ensemble des solutions est  $\bigcap_{i=1}^n F_i$ .

**Définition 5.7** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $x, y$  des éléments de  $E$ .

$y$  est *colinéaire* à  $x$  s'il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $y = \lambda x$ .

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $y$  et  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs de  $E$ .

$y$  est *combinaison linéaire* de  $x_1, \dots, x_n$  s'il existe  $n$  scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que :

$$y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Plus généralement : soient  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaire à support fini, la somme  $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$  est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs  $u_i$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

**Remarque :** Une partie non vide  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si, et seulement si,  $F$  est stable par combinaison linéaire.

**Proposition 5.8** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $F$  une partie de  $E$ .  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si, et seulement si :

- $F \neq \emptyset$ ,
- $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in E$ .

**Exemples 5.4** La partie  $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

En effet  $F$  est non vide car la suite nulle est bien dans  $F$ .

Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et tout  $(u_n)$  et  $(v_n)$  dans  $F$ ,  $\lambda(u_n) + \mu(v_n) = (\lambda u_n + \mu v_n)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} &= \lambda(nu_{n+1} + u_n) + \mu(nv_{n+1} + v_n) \\ &= n(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + (\lambda u_n + \mu v_n). \end{aligned}$$

### 5.1.2 Sous-espace engendré

**Proposition 5.9** Soit  $A$  une partie non vide d'un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . L'ensemble, noté  $\text{Vect}(A)$ , des combinaisons linéaires de vecteurs  $u_i \in A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé *sous-espace engendré* par  $A$ .

$$\text{Si } A = \{u_i, 1 \leq i \leq n\}, \text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

#### Démonstration

- $\text{Vect}(A)$  est non vide car  $A$  contient au moins un vecteur.
- Soient  $X$  et  $Y$  dans  $\text{Vect}(A)$  et  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{K}$ ; par définition, il existe deux parties finies  $J_X, J_Y$  dans  $I$  telles que  $X = \sum_{k \in J_X} \lambda_k u_k$  et  $Y = \sum_{k \in J_Y} \mu_k v_k$ ,  $\lambda_k, \mu_k$  étant dans  $\mathbb{K}$  et  $u_k, v_k$  dans  $A$ .  
Alors  $\lambda X + \mu Y = \sum_{k \in J_X} \lambda \lambda_k u_k + \sum_{k \in J_Y} \mu \mu_k v_k$  est bien une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de  $A$ .
- $\text{Vect}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et clairement  $A \subset \text{Vect}(A)$ .

□

**Remarque :** On peut montrer que  $\text{Vect}(A)$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $A$ . Pour cela on démontre que  $\text{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$ .

**Théorème et définition 5.10**  $n$  est un entier au moins égal à 2 et  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

L'ensemble  $\sum_{k=1}^n F_k = \left\{ \sum_{k=1}^n u_k \mid (u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \dots \times F_n \right\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exemples 5.5** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sum_{k=0}^n \mathbb{K}_k[X] = \mathbb{K}_n[X]$  car, pour tout entier  $i$ ,  $\mathbb{K}_i[X] \subset \mathbb{K}_{i+1}[X]$ .

**Proposition 5.11**  $A$  et  $B$  sont deux parties d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On a :

1.  $A \subset B \implies \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$ .
2.  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si, et seulement si,  $\text{Vect}(A) = A$ .
3.  $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$ .
4.  $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ .

**Remarque :** Le point 4 s'étend à une réunion finie de parties et on a pour la famille de sous-espaces vectoriels  $F_i$ ,  $\text{Vect}(\cup_{i=1}^n F_i) = \sum_{i=1}^n F_i$ . En particulier, pour tout

$$(u_1, \dots, u_n) \in E^n, \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{K}u_i.$$

**Démonstration** Nous démontrons le point 4.

Comme  $A \subset A \cup B$  et  $B \subset A \cup B$ , on a  $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(A \cup B)$  et  $\text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$  donc  $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$ .

Réciproquement, si  $x \in \text{Vect}(A \cup B)$ , il existe une famille  $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$  et une famille  $u_i, i \in I$  de vecteurs de  $A \cup B$  telles que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ . Cette somme étant finie, on regroupe les vecteurs selon leur appartenance à  $A$  et  $B$  et par suite  $x$  est somme d'un vecteur de  $\text{Vect}(A)$  et  $\text{Vect}(B)$ .  $\square$

**Exemples 5.6** Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs d'un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ , alors  $\text{Vect}\{u\} = \mathbb{K}u$  et  $\text{Vect}\{u, v\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$ .

Si  $u$  est colinéaire à  $v$  alors  $\text{Vect}\{u, v\} = \mathbb{K}u$ .

## 5.2 Application linéaire

**Définition 5.12** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Une application  $f$  de  $E$  vers  $F$  est *linéaire* si :

- $\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u + v) = f(u) + f(v),$
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$

### Vocabulaire

- On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  vers  $F$ .
- Un *endomorphisme* de  $E$  est une application linéaire de  $E$  vers  $E$ , on note  $\mathcal{L}(E)$  leur ensemble.
- Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective,  $E$  et  $F$  sont dits isomorphes.
- Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif, on note  $\text{GL}(E)$  leur ensemble.
- Une *forme linéaire* est une application linéaire de  $E$  vers  $\mathbb{K}$ , on note  $E^*$  leur ensemble appelé le *dual* de  $E$ .

### Exemples 5.7

- Soit  $E_1 \times \cdots \times E_q$  l'espace vectoriel produit de  $q$  sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$ . L'application

$$\varphi : E_1 \times \cdots \times E_q \rightarrow E, (x_1, \dots, x_q) \mapsto \sum_{k=1}^q x_k$$

est linéaire.

- Soient  $a$  et  $b$  deux entiers positifs non nuls. L'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P \mapsto X^2 P'' - (a + b - 1) X P' + ab P \end{cases}$$

est un endomorphisme.

### Conséquences immédiates

1.  $f(0_E) = 0_F$ .
2. Pour toute famille  $(u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs de  $E$  et toute famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de scalaires,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i),$$

ce qui donne une caractérisation des applications linéaires :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

**Exemples 5.8**

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . L'application de  $h_\alpha : E \rightarrow E, u \mapsto \alpha u$  est un endomorphisme. Si  $\alpha \neq 0$ ,  $h_\alpha$  est appelée *homothétie vectorielle*,  $h_0$  est l'application nulle et  $h_1 = \text{Id}_E$ . Pour tout  $\alpha \neq 0$ ,  $h_\alpha$  est un automorphisme et  $h_\alpha^{-1} = h_{\frac{1}{\alpha}}$ . Pour tous scalaires  $\alpha, \beta$ ,  $h_\alpha \circ h_\beta = h_{\alpha\beta} = h_\beta \circ h_\alpha$ .
2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . L'application  $i_F : F \rightarrow E, u \mapsto u$  est linéaire et appelée *injection canonique*.
3. Soit  $E = \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $F = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des applications définies sur  $I$ .

$$\varphi : E \longrightarrow F, f \mapsto f'$$

est une application linéaire.

4. Soit  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[a, b]$ .

$$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(t) dt$$

est une forme linéaire sur  $E$ .

5. Soit  $E = E_1 \times \cdots \times E_n$  un espace vectoriel produit et  $k$  un entier entre 1 et  $n$ .

$$p_k : E \longrightarrow E_k, (u_1, \dots, u_n) \mapsto u_k$$

est linéaire.

**5.2.1 Structure de  $\mathcal{L}(E, F)$** 

**Théorème 5.13** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Soient  $f, g$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{K}$ , alors  $\alpha f + \beta g$  est une application linéaire de  $E$  vers  $F$  et  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**5.3 Noyau et image**

**Proposition 5.14** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Si  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $f(E_1)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
2. Si  $F_1$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  alors  $f^{-1}(F_1)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Démonstration**

—  $0_F = f(0_E)$ , donc  $0_F \in f(E_1)$ .

Soient  $u', v' \in f(E_1)$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Il existe alors  $u, v \in E_1$  tels que  $u' = f(u)$  et  $v' = f(v)$ . On a  $\alpha u' + \beta v' = \alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v)$ , donc  $\alpha u' + \beta v' \in f(E_1)$ .

—  $0_E \in f^{-1}(F_1)$ .

Soient  $u, v \in f^{-1}(F_1)$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . On a alors  $f(u), f(v) \in F_1$ , donc  $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \in F_1$ , par conséquent  $\alpha u + \beta v \in f^{-1}(F_1)$ .  $\square$

**Proposition 5.15** Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $A \subset E$  alors  $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$ .

**Démonstration** On raisonne par double inclusion.

- $A \subset \text{Vect}(A)$  donc  $f(A) \subset \text{Vect}(f(A))$ , or  $\text{Vect}(f(A))$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  contenant  $f(A)$ , donc il contient le plus petit sous-espace contenant  $f(A)$ , soit  $\text{Vect}(f(A)) \subset f(\text{Vect}(A))$ .
- On a  $f(A) \subset \text{Vect}f(A)$ , donc  $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\text{Vect}f(A))$ . Or  $A \subset f^{-1}(f(A))$  donc  $A \subset f^{-1}(\text{Vect}f(A))$ .

Comme  $f^{-1}(\text{Vect}f(A))$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $A$ , on a :  $\text{Vect}(A) \subset f^{-1}(\text{Vect}f(A))$ , par suite  $f(\text{Vect}(A)) \subset f(f^{-1}(\text{Vect}f(A)))$ .

On sait par ailleurs que pour toute partie  $B$ ,  $f(f^{-1}(B)) \subset B$  donc :

$$f(f^{-1}(\text{Vect}f(A))) \subset \text{Vect}f(A),$$

ce qui prouve la seconde inclusion :

$$f(\text{Vect}(A)) \subset \text{Vect}f(A). \quad \square$$

**Exemples 5.9** Si  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , on a :

$$f(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

Ce qui signifie que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images.

### **Théorème et définition 5.16**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. L'ensemble  $f(E) = \{f(u), u \in E\}$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  appelé *image de  $f$*  et noté  $\text{Im}f$ .
2. L'ensemble  $f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé *noyau de  $f$*  et noté  $\text{Ker}f$ .

### **Exemples 5.10**

1. Soit  $\phi : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), f \mapsto f'$ .  $\text{Ker} \phi$  est l'ensemble des fonctions constantes sur  $I$ .
2. Soit  $E = E_1 \times \dots \times E_n$  un espace vectoriel produit et  $k$  un entier entre 2 et  $n - 1$ .

$$p_k : E \longrightarrow E_k, (u_1, \dots, u_n) \mapsto u_k$$

On a  $\text{Ker} p_k = E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times \{0_{E_k}\} \times E_{k+1} \times \dots \times E_n$  et  $\text{Im} p_k = E_k$ .

3. Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . L'ensemble

$$E_\lambda = \{u \in E, f(u) = \lambda u\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E$ . En effet,  $E_\lambda$  est le noyau de l'application linéaire  $f - \lambda \text{Id}_E$ .

**Exercice** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ ,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $A, B$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $f(A) \subset f(B)$ . Montrons que  $A + \text{Ker } f \subset B + \text{Ker } f$ .

Prenons  $x \in A + \text{Ker } f$ . Il existe  $a \in A$  et  $u \in \text{Ker } f$  tels que  $x = a + u$ .  $f(x) = f(a) \in f(A) \subset f(B)$ . Il existe donc  $b \in B$  tel que  $f(x) = f(b)$ , soit  $f(x - b) = 0$  et  $x - b \in \text{Ker } f$ . On a montré que  $x = b + \text{Ker } f \in B + \text{Ker } f$ .

**Proposition 5.17** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- $f$  est injective si, et seulement si,  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ .
- $f$  est surjective si, et seulement si,  $\text{Im } f = F$ .

### Exemples 5.11

- L'application linéaire  $D : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), f \mapsto D(f) = f'$  n'est pas injective car  $\text{Ker } D$  est l'ensemble des fonctions constantes sur  $I$ . Elle n'est pas surjective, car  $\text{Im } D = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ; en effet,  $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  appartient à  $\text{Im } D$  s'il existe  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  telle que  $f' = g$ , ainsi  $g$  est continue sur  $I$  et  $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ . Réciproquement, si  $g$  est continue sur  $I$  alors elle admet au moins une primitive  $f$  dont la dérivée est continue, donc  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ .
- Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}_n[X]$  défini par  $f(P) = P - P'$ .

**$f$  est injective :**  $\text{Ker } f = \{0\}$ , en effet si  $P \in \text{Ker } P$  et si  $P \neq 0$  alors  $\deg P' < \deg P$ ; on en déduit que  $\deg(P - P') = \deg P$  ce qui montre que  $P \neq 0$ . Par conséquent  $\text{Ker } f = \{0\}$  et  $f$  est injective.

**$f$  est surjective :** On n'utilise pas ici la théorie de la dimension qui serait immédiate. On donne  $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in E$ . On détermine  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  vérifiant :

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^n b_k X^k,$$

ce qui revient à :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - (k+1)a_{k+1})X^k + a_n X^n = \sum_{k=0}^n b_k X^k.$$

Par suite, nous avons un système échelonné d'inconnues  $(a_0, \dots, a_n)$  :

$$\begin{cases} a_n = b_n \\ a_k - (k+1)a_{k+1} = b_k \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution obtenue de proche en proche en allant de l'indice  $n$  à 0.

## 5.4 Somme directe

**Définition 5.18** Soit  $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Le sous-espace  $F = \sum_{i=1}^n F_i$  est en *somme directe* si tout vecteur  $u \in F$  s'écrit de manière *unique* sous la forme  $u = \sum_{i=1}^n u_i$  où  $u_i \in F_i$ .

La somme  $F$  est alors notée  $F = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ .

Le vecteur  $u_i$  est appelé *la composante* de  $u$  selon  $F_i$ .

**Remarque :** Sachant que l'application  $\varphi : F_1 \times \cdots \times F_n \rightarrow F, (u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{k=1}^n u_k$  est linéaire, la définition revient à dire que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

**Théorème 5.19** Une famille  $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$  de sous-espaces vectoriels de  $E$  est en somme directe si, et seulement si, l'une des propositions suivantes est vérifiée :

1.  $\forall (u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \left( \sum_{i=1}^n u_i = 0 \Rightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0 \right)$ .
2.  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \left( \sum_{i=1}^k F_i \right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$ .

### Démonstration

1. Supposons que la somme  $\sum_{i=1}^n F_i$  soit directe. Prenons  $(u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$  telle que  $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ , on sait par ailleurs que  $\sum_{i=1}^n 0_{F_i} = 0$ , alors par unicité de la décomposition on a  $\forall i, u_i = 0_{F_i} = 0_E = 0$ .  
Réciproquement, supposons que :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \left( \sum_{i=1}^n u_i = 0 \Rightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0 \right)$$

et supposons qu'un vecteur de  $\sum_{i=1}^n F_i$  se décompose de deux manières au moins. On a alors :

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n v_i, \quad u_i \in F_i, v_i \in F_i$$

$$\sum_{i=1}^n (u_i - v_i) = 0.$$

Par conséquent, pour tout  $i \leq n$ ,  $u_i = v_i$ , ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

2. Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $u \in \left( \sum_{i=1}^k F_i \right) \cap F_{k+1}$ , il existe alors des vecteurs  $u_i \in F_i, i \leq k+1$  tels que  $u = \sum_{i=1}^k u_i = u_{k+1}$ , par suite  $\sum_{i=1}^k u_i - u_{k+1} = 0_E$  et d'après 1, on a  $u_i = 0$  pour tout  $i \leq k+1$  et  $u = 0$ .

Réciproquement, supposons  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \left( \sum_{i=1}^k F_i \right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$ , et

prenons  $u_i \in F_i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ .

On a  $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-u_i) \in F_n \cap \left( \sum_{i=1}^{n-1} F_i \right) = \{0_E\}$ , et donc  $u_n = 0$ , puis on réitère cette démarche et on obtient de proche en proche  $u_i = 0$  pour tous les entiers  $i$ . □

**Exemples 5.12** Dans  $\mathbb{K}^n$ , les sous-espaces  $F = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$  et  $G = \mathbb{K}u$ , où  $u = (1, \dots, 1)$ , sont supplémentaires.

En effet si  $x \in F \cap G$ , il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \lambda$ . On trouve facilement que  $\lambda = 0$  et donc  $x = 0$ .

### 5.4.1 Sous-espaces supplémentaires

**Définition 5.20** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On dit que  $F$  et  $G$  sont *supplémentaires* si  $E = F \oplus G$ .

**Remarque :**  $F$  et  $G$  sont *supplémentaires* si, et seulement si, tout  $u \in E$  s'écrit de façon unique  $u = u_1 + u_2$  où  $(u_1, u_2) \in F \times G$  ou encore, si, et seulement si,  $F \cap G = \{0\}$  et  $E = F + G$ .

### Exemples 5.13

- Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n+1$  où  $n \in \mathbb{N}$ . L'idéal  $(P)$  engendré par  $P$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ . On a  $\mathbb{K}[X] = (P) \oplus \mathbb{K}_n[X]$ . En effet, pour tout polynôme  $A \in \mathbb{K}[X]$  il existe, par la division euclidienne, un unique polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et un unique polynôme  $R \in \mathbb{K}_n[X]$  tels que  $A = QP + R$ .
- En particulier, dans l'espace vectoriel réel  $E = \mathbb{R}[X]$ ,  $E_1 = (X^2 + 1)\mathbb{R}[X]$  le sous-espace des polynômes multiples du polynôme  $X^2 + 1$  et  $E_2 = \mathbb{R}_1[X]$  le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.  
On a  $\mathbb{R}[X] = E_1 \oplus E_2$ .
- Soient  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des applications de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $E_1$  le sous-espace des applications paires et  $E_2$  le sous-espace des applications impaires.  $E$  est somme directe de  $E_1$  et  $E_2$ .

En effet, pour toute application  $f$ , et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)),$$

où l'application  $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$  est paire et  $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$  est impaire.

En outre, si  $f \in E_1 \cap E_2$ , on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = f(x) = -f(x)$ , par conséquent,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$  et donc  $f$  est la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

- On montre de façon similaire que l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est somme directe du sous-espace des matrices symétriques et du sous-espace des matrices anti-symétriques.

On admettra le théorème suivant dont la démonstration nécessite l'axiome du choix.

**Théorème 5.21** *Pour tout sous-espace vectoriel  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  il existe au moins un sous-espace  $G$  tel que  $E = F \oplus G$ .  $G$  est appelé sous-espace supplémentaire de  $F$ .*

**Remarque :** En dehors des sous-espaces  $E$  et  $\{0\}$ , il n'y a jamais unicité du supplémentaire.

**Exemples 5.14** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des applications continues de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ . Soit  $F$  le sous-espace vectoriel des fonctions  $f \in E$  vérifiant

$$\int_0^1 f(t)dt = 0, \text{ déterminons un supplémentaire } G \text{ de } F.$$

Soit  $\varphi \in E$ , s'il existe  $(f, g) \in F \times G$  tel que  $\varphi = f + g$  alors :

$$\int_0^1 \varphi(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 g(t)dt.$$

Par suite si nous posons  $f = \varphi - \int_0^1 \varphi(t)dt$  et  $g = \int_0^1 \varphi(t)dt$ , on a une solution. Par suite, si nous prenons pour  $G$  les fonctions constantes sur  $[0, 1]$ , on a  $E = F + G$ . On vérifie facilement que  $F \cap G = \{0\}$ .

**Exercice** Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $\text{Ker } f$  admet un supplémentaire  $G$ . Montrons que  $G$  et  $\text{Im } f$  sont isomorphes.

La restriction de  $f$  à  $G$ , notée  $f_G$  est une application linéaire de  $G$  vers  $\text{Im } f$ .

$f_G$  est injective. En effet, pour tout  $x \in \text{Ker } f_G$ , on a  $f_G(x) = f(x) = 0$  et  $x \in G$ . Par suite  $x \in \text{Ker } f \cap G = \{0\}$  donc  $\text{Ker } f_G = \{0\}$ .

$f_G$  est surjective. Pour tout  $y \in \text{Im } f$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ ; or  $x = x' + x''$  avec  $x' \in \text{Ker } f$  et  $x'' \in G$ , donc  $y = f(x' + x'') = f(x'')$ .

Par suite  $y \in f(G) = f_G(G)$ .

## 5.5 Anneau des endomorphismes

**Théorème 5.22** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau non commutatif d'unité l'application  $\text{Id}_E$ . En outre cet anneau n'est pas intègre.

L'ensemble des endomorphismes inversibles  $\text{GL}(E)$  est un groupe pour la loi  $\circ$ , non commutatif en général.

### Démonstration

- On sait que  $(\mathcal{L}(E), +)$  est un groupe commutatif, car  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .
- La loi  $\circ$  est une loi interne, en effet, pour tout  $f, g$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , pour tout  $u, v$  dans  $E$  et tout  $\alpha, \beta$  dans  $\mathbb{K}$ , on a :

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha u + \beta v) &= g(\alpha f(u) + \beta f(v)) \quad \text{linéarité de } f \\ &= \alpha g \circ f(u) + \beta g \circ f(v) \quad \text{linéarité de } g. \end{aligned}$$

- La loi  $\circ$  est toujours associative et  $\text{Id}_E$  en est un élément neutre.
- La loi  $\circ$  est distributive par rapport à la loi  $+$ . En effet, pour tout  $f, g, h$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et tout  $u$  dans  $E$ , on a :

$$\begin{aligned} f \circ (g + h)(u) &= f(g(u) + h(u)) \quad \text{par définition de l'addition des fonctions} \\ &= f(g(u)) + f(h(u)) \quad \text{linéarité de } f, \end{aligned}$$

donc

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h.$$

On montre de façon analogue, mais la linéarité n'intervient pas, que :

$$(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f.$$

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $f$  est inversible s'il existe  $g \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E$  ce qui revient à dire que  $f$  est bijective d'application réciproque  $g$ .  
On sait d'autre part que les éléments inversibles d'un anneau forment un groupe, par suite  $(\text{Gl}(E), \circ)$  est un groupe.
- Pour voir que  $\mathcal{L}(E)$  n'est pas intègre en général, il suffit de prendre  $E = E_1 \times E_2$  le produit de deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Les endomorphismes  $f : (u_1, u_2) \mapsto (u_1, 0)$  et  $g : (u_1, u_2) \mapsto (0, u_2)$  vérifient  $f \circ g = 0$  où 0 désigne l'endomorphisme nul.

□

### 5.5.1 Itérés d'un endomorphisme

**Définition 5.23** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

$$f^0 = \text{Id}_E, f^1 = f, \quad \forall n \geq 2, f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ facteurs}}.$$

**Proposition 5.24** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent.

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

1.  $\text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1}$  et  $\text{Im } f^{n+1} \subset \text{Im } f^n$ .
2.  $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$ .
3.  $(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$ , c'est la formule du binôme.
4.  $f^n - g^n = (f - g) \left( \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right)$  pour  $n \geq 1$ .

**Démonstration** Démontrons 1, les autres propriétés étant relativement triviales.

Soit  $u \in \text{Ker } f^n$ , on a alors  $f^n(u) = 0$  d'où  $f^{n+1}(u) = f(f^n(u)) = f(0) = 0$  et  $u \in \text{Ker } f^{n+1}$ .

Soit  $v \in \text{Im } f^{n+1}$ , il existe alors  $u \in E$  tel que  $v = f^{n+1}(u) = f^n(f(u))$ , ainsi  $v$  est l'image de  $f(u) \in E$  par l'endomorphisme  $f^n$  donc  $\text{Im } f^{n+1} \subset \text{Im } f^n$ .  $\square$

**Proposition 5.25** Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathcal{L}(E)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $g \circ f = 0$ .
- $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ .

**Démonstration** Supposons que  $g \circ f = 0$ .

Pour tout  $v \in \text{Im } f$ , il existe  $u \in E$  tel que  $v = f(u)$  alors  $g(v) = g(f(u)) = g \circ f(u) = 0$  et on en tire que  $v \in \text{Ker } g$ .

Supposons que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ .

Pour tout  $u \in E$ ,  $f(u) \in \text{Im } f \subset \text{Ker } g$ , donc  $g(f(u)) = 0$ , par conséquent  $g \circ f$  est l'endomorphisme nul.  $\square$

**Définition 5.26** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- $f$  est *idempotente* si  $f^2 = f$ .
- $f$  est *nilpotente* s'il existe un entier  $n > 0$  tel que  $f^n = 0$ . Le plus petit entier  $n$  vérifiant cette proposition est appelé *indice de nilpotence* de  $f$ .

### Exemples 5.15

1. Soit  $f$  un endomorphisme nilpotent non nul. Il existe par conséquent un entier  $n \geq 1$  tel que  $f^n = 0$ . Montrons que  $\text{Id} - f \in \text{GL}(E)$ . Sachant que  $f$  et  $\text{Id}$  commutent, on a :

$$\begin{aligned} \text{Id} &= \text{Id} - f^n = (\text{Id} - f) \circ \left( \sum_{k=0}^{n-1} f^k \right) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{n-1} f^k \right) \circ (\text{Id} - f). \end{aligned}$$

Par conséquent  $\text{Id} - f$  est inversible d'inverse  $\sum_{k=0}^{n-1} f^k$ .

2. Montrons que l'endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$ ,  $P \mapsto f(P) = P - P'$  est inversible.

Notons  $g$  l'endomorphisme  $P \mapsto P'$ . On a alors  $f = \text{Id} - g$ .  $g$  est un endomorphisme nilpotent d'indice  $n + 1$ , donc  $f^{n+1} = 0$ . On montre comme ci-dessus que :

$$f^{-1} = (\text{Id} - g)^{-1} = \sum_{k=0}^n g^k, \quad \text{soit } \forall P \in \mathbb{K}_n[X], f^{-1}(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)},$$

où  $P^{(k)}$  désigne la  $k$ -ième dérivée du polynôme  $P$ .

3. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $f^2 = f$  et  $f \neq 0$ . Montrons que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})$ .  $\text{Ker } f$  et  $\text{Ker}(f - \text{Id})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  en tant que noyaux d'applications linéaires.

Si  $u \in \text{Ker } f \cap \text{Ker}(f - \text{Id})$  alors  $f(u) = 0$  et  $f(u) - u = 0$  donc  $u = 0$  par suite  $\text{Ker } f \cap \text{Ker}(f - \text{Id}) = \{0\}$ .

Pour tout  $u \in E$ , on a  $u = f(u) + (u - f(u))$ . Or  $f(u) \in \text{Ker}(f - \text{Id})$  car  $(f - \text{Id})(f(u)) = f(u) - f^2(u) = f(u) - f(u) = 0$  et  $u - f(u) \in \text{Ker } f$  car  $f(u - f(u)) = f(u) - f^2(u) = f(u) - f(u) = 0$ . Par suite  $E = \text{Ker } f + \text{Ker}(f - \text{Id})$ .

## 5.6 Endomorphismes remarquables

$E$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

### 5.6.1 Homothétie vectorielle

**Définition 5.27** On appelle *homothétie vectorielle* de  $E$  de rapport  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , l'endomorphisme de  $E$  défini par  $h = \lambda \text{Id}$ .

#### Proposition 5.28

1. Pour tout  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{K}$ , on a  $h_\lambda \circ h_\mu = h_\mu \circ h_\lambda = h_{\lambda\mu}$ .
2. Une homothétie vectorielle commute avec tout endomorphisme de  $E$ .
3. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $h_\lambda \in \text{GL}(E)$  et  $h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$ .
4. L'ensemble des homothéties de  $E$ ,  $\mathcal{H}(E)$  est un sous-groupe commutatif de  $(\text{GL}(E), \circ)$ .

### 5.6.2 Projection vectorielle

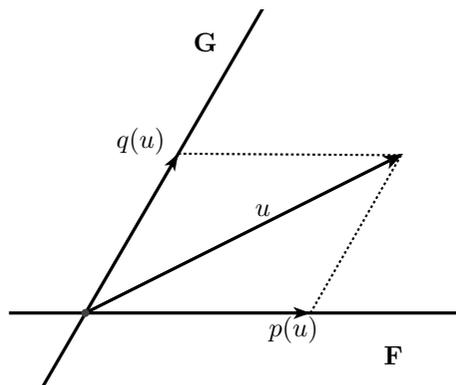
Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$  :  $E = F \oplus G$ .

Pour vecteur  $u \in E$  il existe un unique vecteur  $u' \in F$  et un unique vecteur  $u'' \in G$  tel que  $u = u' + u''$ .

**Définition 5.29** On appelle *projection vectorielle* sur  $F$  parallèlement à  $G$  l'application :

$$p : E \rightarrow E, u \mapsto p(u) = u'.$$

On définit de façon analogue la projection vectorielle  $q$  de  $E$  sur  $G$ .



### Théorème 5.30

1.  $p$  est un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $p^2 = p$ .  
En outre,  $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id})$  et  $\text{Ker } p = G$ .
2.  $q = \text{Id} - p$ ,  $q^2 = q$  et  $q \circ p = p \circ q = 0$ .

### 5.6.3 Projecteur

**Définition 5.31** On appelle *projecteur* de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$  tout endomorphisme vérifiant :

$$f^2 = f.$$

**Exemples 5.16** Une projection vectorielle est un projecteur.

**Théorème 5.32** Si  $f$  est un projecteur de  $E$  alors :

1.  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ ,
2.  $f$  est la projection vectorielle sur  $\text{Im } f$  parallèlement à  $\text{Ker } f$ .

La démonstration a été vue plus haut.

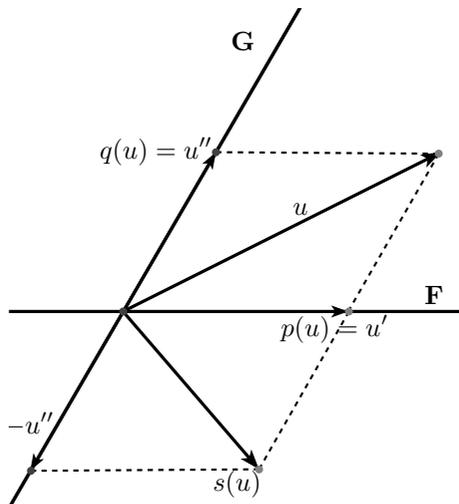
### 5.6.4 Symétrie vectorielle

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$  :  
 $E = F \oplus G$ .

Pour tout vecteur  $u \in E$ , il existe un unique vecteur  $u' \in F$  et un unique vecteur  $u'' \in G$  tels que  $u = u' + u''$ .

**Définition 5.33** On appelle *symétrie vectorielle* par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  l'application :

$$s : E \rightarrow E, u \mapsto s(u) = u' - u''.$$



**Théorème 5.34** L'application  $s$  est un endomorphisme de  $E$  tel que  $s^2 = \text{Id}$ .  
En outre,  $F = \text{Ker}(s - \text{Id})$  est le sous-espace des vecteurs invariants et  $G = \text{Ker}(s + \text{Id})$ .  
Si  $p$  désigne la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , on a :

$$s = 2p - \text{Id}.$$

### Démonstration

- Soient  $u$  et  $v$  dans  $E$ , il existe alors  $u', v'$  dans  $F$  et  $u'', v''$  dans  $G$ , tous uniques tels que  $u = u' + u''$  et  $v = v' + v''$ . On a :

$$\begin{aligned} s(u + v) &= s((u' + v') + (u'' + v'')) \\ &= (u' + v') - (u'' + v'') \\ &= s(u) + s(v) \end{aligned}$$

et de manière analogue,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, s(\lambda u) = \lambda s(u)$ .

Pour tout  $u \in E$ , on a :  $s^2(u) = s(u' - u'') = u' + u'' = u$ .

- Les vecteurs invariants : Dire que  $s(u) = u$  revient à dire  $u \in \text{Ker}(s - \text{Id})$ , d'autre part  $s(u) = u$  revient à dire  $u' - u'' = u' + u''$  soit  $u'' = 0$ , par suite les vecteurs invariants sont les vecteurs de  $F$ .
- Dire que  $u \in \text{Ker}(s + \text{Id})$  revient à dire  $s(u) = -u$ , c'est-à-dire  $u' - u'' = -u' - u''$  soit  $u' = 0$ . Par suite  $\text{Ker}(s + \text{Id}) = G$ .
- Pour tout  $u \in E$ , on a  $s(u) + u = (u' - u'') + (u' + u'') = 2u' = 2p(u)$ , ainsi  $s = 2p - \text{Id}$ .

□

**Théorème 5.35** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $f^2 = \text{Id}$  alors :

1.  $E = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id})$ ,
2.  $f$  est la symétrie vectorielle par rapport à  $F = \text{Ker}(f - \text{Id})$  parallèlement à  $G = \text{Ker}(f + \text{Id})$ .

### Démonstration

- Soit  $u \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f + \text{Id})$ , alors  $f(u) = u = -u$  donc  $u = 0$  et  $\text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f + \text{Id}) = \{0\}$
- Par analyse et synthèse, mais on a le droit de connaître le résultat, on montre que, pour tout  $u \in E$ , on a :

$$u = \frac{1}{2}(u + f(u)) + \frac{1}{2}(u - f(u)).$$

On vérifie que  $f\left(\frac{1}{2}(u + f(u))\right) = \frac{1}{2}(f(u) + f^2(u)) = \frac{1}{2}(f(u) + u)$ , par suite,  $\frac{1}{2}(u + f(u)) \in \text{Ker}(f - \text{Id})$  et de manière analogue on a :

$$\frac{1}{2}(u - f(u)) \in \text{Ker}(f + \text{Id}).$$

- Pour tout  $u = \frac{1}{2}(u + f(u)) + \frac{1}{2}(u - f(u)) \in F + G$ , on a alors :

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{2}(f(u) + f^2(u)) + \frac{1}{2}(fu - f^2(u)) \\ &= \frac{1}{2}(f(u) + u) + \frac{1}{2}(fu - u) \\ &= \frac{1}{2}(u + f(u)) - \frac{1}{2}(u - fu), \end{aligned}$$

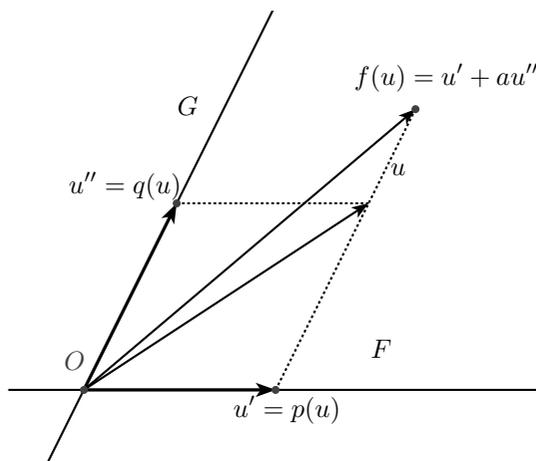
ce qui prouve que  $f$  est la symétrie vectorielle par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .  $\square$

### 5.6.5 Affinité vectorielle

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$  :  $E = F \oplus G$ .

Pour tout vecteur  $u \in E$ , il existe un unique vecteur  $u' \in F$  et un unique vecteur  $u'' \in G$  tels que  $u = u' + u''$ .

**Définition 5.36** Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ . L'application  $f : E \rightarrow E, u \mapsto u' + \alpha u''$  est appelée *affinité vectorielle* par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  et de rapport  $\alpha$ .



**Théorème 5.37** Toute affinité  $f$  de  $E$  est un endomorphisme et

$$f = p + \alpha q$$

où  $p$  et  $q$  sont les projecteurs respectivement sur  $F$  et  $G$  parallèlement à respectivement  $G$  et  $F$ .

**Exemples 5.17** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 4f + 3\text{Id}_E = 0$ . Montrons que  $f$  est une affinité.

On a  $E = \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ . En effet :

- Pour tout  $x \in \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ , on a  $f(x) = 3x = x$  donc  $x = 0$ .
- Tout  $x \in E$  se décompose sous la forme :

$$x = \frac{1}{2}(3x - f(x)) + \frac{1}{2}(f(x) - x)$$

avec  $3x - f(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et  $f(x) - x \in \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E)$ .

Par suite tout  $x \in E$  s'écrit de manière unique  $x = u + v \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E)$ .

On a  $f(u) = u$  et  $f(v) = 3v$ . Ce qui prouve que  $f$  est une affinité de rapport 3 par rapport à  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_E)$ .

Plus généralement, si  $\alpha \neq 1$  est un scalaire et  $f$  un endomorphisme vérifiant :

$$f^2 - (1 + \alpha)f + \alpha \text{id}_E = 0,$$

alors  $f$  est une affinité de rapport  $\alpha$ .

### 5.6.6 Somme directe et projecteurs

Le théorème suivant donne une méthode pour construire une application linéaire d'un espace vectoriel  $E$  vers un espace vectoriel  $F$ .

**Théorème 5.38** *E et F sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .  $q$  est un entier au moins égal à 2.*

*Si  $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$ , et si, pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $f_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ , alors il existe une unique application  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que la restriction de  $f$  à  $E_i$ ,  $f|_{E_i} = f_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ .*

**Démonstration**

— Si  $f$  existe alors pour tout  $u \in E$ ,  $u = \sum_{i=1}^q u_i$  où  $(u_1, \dots, u_q) \in E_1 \times \dots \times E_q$ .  
Comme  $f$  est linéaire :

$$f(u) = \sum_{i=1}^q f(u_i) = \sum_{i=1}^q f_i(u_i) \quad \text{car } f|_{E_i} = f_i.$$

— Si  $u \in E$  et  $u = \sum_{i=1}^q u_i$ , en posant  $f(u) = \sum_{i=1}^q f_i(u_i)$ , on définit bien une application de  $E$  vers  $F$ , elle est unique car la décomposition de  $x$  est unique. En outre  $f$  est linéaire :

Soient  $u$  et  $v$  dans  $E$ .  $u = \sum_{i=1}^q u_i$ ,  $v = \sum_{i=1}^q v_i$  où  $(u_1, \dots, u_q)$  et  $(v_1, \dots, v_q)$  sont dans  $E_1 \times \dots \times E_q$ .

On a alors  $u + v = \sum_{i=1}^q (u_i + v_i)$  où  $(u_1 + v_1, \dots, u_q + v_q) \in E_1 \times \dots \times E_q$  et

pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda u = \sum_{i=1}^q (\lambda u_i)$  où  $(\lambda u_1, \dots, \lambda u_q) \in E_1 \times \dots \times E_q$ .

$$\begin{aligned} f(u + v) &= \sum_{i=1}^q f_i(u_i + v_i) = \sum_{i=1}^q (f_i(u_i) + f_i(v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^q f_i(u_i) + \sum_{i=1}^q f_i(v_i) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda u) &= \sum_{i=1}^q f_i(\lambda u_i) = \sum_{i=1}^q \lambda f_i(u_i) = \lambda \left( \sum_{i=1}^q f_i(u_i) \right) = \lambda f(u). \quad \square \end{aligned}$$

**Corollaire 5.39** *Deux applications linéaires, égales sur chacun des espaces d'une décomposition en somme directe, sont égales.*

**Exemples 5.18**

1. On reprend les notations du théorème.  $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$ , et pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , on définit le projecteur associé à la décomposition  $p_i \in \mathcal{L}(E)$  par  $p_i(u) = u_i$ . On a :

$$p_i^2 = p_i, \text{Im } p_i = E_i \text{ et } \text{Ker } p_i = \bigoplus_{j=1, j \neq i}^q E_j.$$

- (a) Si  $i \neq j$  et  $k$  dans  $\llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $(p_i \circ p_j)|_{E_k} = 0$ , où  $0$  est l'application linéaire nulle de  $E_k$  vers  $E$ , par conséquent, par le théorème, on a :

$$p_i \circ p_j = 0.$$

- (b) Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 1, q \rrbracket$ , et tout  $u_j \in E_j$ ,  $\left(\sum_{i=1}^q p_i\right)(u_j) = u_j$  donc la restriction de  $\left(\sum_{i=1}^q p_i\right)$  à  $E_j$  est l'application identité de  $E_j$  vers  $E$ , par suite :

$$\sum_{i=1}^q p_i = \text{Id}_E.$$

2. Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Considérons l'endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que  $\forall u \in F, f(u) = u$  et  $\forall u \in G, f(u) = -u$ .  $f$  est alors parfaitement déterminé ; soit  $u = u' + v' \in F \oplus G$ , on a alors  $f(u) = u' - v'$  et  $f$  est la symétrie vectorielle par rapport à  $F$  de direction  $G$ .

Les propriétés  $f^2 = \text{Id}$  et  $f = 2p - \text{Id}$  se vérifient facilement sur  $F$  et  $G$  donc elles sont établies sur  $F \oplus G = E$ .

## 5.7 Exercices

### Exercice 5.1 :

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des suites réelles convergentes.

- Montrer que  $\mathcal{C}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $\mathcal{C}_0$  le sous-espace des suites convergentes vers 0. Montrer que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathbb{R}$ .

### Exercice 5.2 :

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des endomorphismes  $f$  de  $E$  tels que  $f^2 - 7f + 12\text{Id}_E = 0$ .

- Montrer que  $\mathcal{A}$  est non vide.
- Montrer que tout élément de  $\mathcal{A}$  est un automorphisme.
- On suppose que  $f \in \mathcal{A}$ .
  - Vérifier que  $p = f - 3\text{Id}_E$  est un projecteur de  $E$ .
  - Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}^*$  tel que  $q = a(f - 4\text{Id}_E)$  est un projecteur non nul de  $E$ .
  - Que peut-on dire de  $p \circ q$ , de  $q \circ p$ , de  $p + q$  ?
  - En déduire que :

$$E = \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 4\text{Id}_E).$$

- Déterminer  $f^n$  en fonction de  $p$  et de  $q$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), puis en fonction de  $f$ .
- Calculer  $f^n$  lorsque  $n < 0$ .

**Exercice 5.3 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

a. Montrer que :

$$E = \text{Ker}(u) + \text{Im}(u) \iff \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2).$$

b. Montrer que :

$$\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0\} \iff \text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2).$$

c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u).$$

**Exercice 5.4 :**

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ .

a. Montrer que  $r = p + q - p \circ q$  est un projecteur.

b. Déterminer  $\text{Ker } r$  et  $\text{Im } r$  en fonction des noyaux et images de  $p, q$ .

**Exercice 5.5 :**

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $L, M, N$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$ .

a. Montrer que  $(L \cap M) + (L \cap N) \subset L \cap (M + N)$ .

b. Montrer que l'inclusion est stricte.

**Exercice 5.6 :**

Soit  $E = \mathbb{K}[X]$ , l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Soient  $\varphi$  et  $\psi$  les endomorphismes de  $E$  définies par  $\varphi(P) = P'$  et  $\psi(P) = XP$ .

a. Les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont-elles injectives ?

b. Les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont-elles surjectives ?

c. Les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont-elles bijectives ?

**Exercice 5.7 :**

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\text{Ker } u = \text{Im } u$  et  $S$  un supplémentaire de  $\text{Im } u$  :  $E = S \oplus \text{Im } u$ .

a. Montrer que pour tout  $x \in E$ , il existe un unique couple  $(y, z) \in S^2$  tel que  $x = y + u(z)$ .

On pose alors  $z = v(x)$  et  $y = w(x)$ .

b. Montrer que  $v$  est linéaire et calculer  $u \circ v + v \circ u$ .

c. Montrer que  $w$  est linéaire et calculer  $u \circ w + w \circ u$ .

$u$  est un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^2 = 0$  et on suppose qu'il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u \circ v + v \circ u = \text{Id}_E$ .

d. A-t-on alors  $\text{Ker } u = \text{Im } u$  ?

e. Construire un endomorphisme non nul  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $u^2 = 0$  vérifiant  $\text{Im } u$  contenu strictement dans  $\text{Ker } u$ . Préciser un endomorphisme simple  $w$  tel que  $u \circ w + w \circ u = u$ .

**Exercice 5.8 :**

$n$  est un entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $(H_1, \dots, H_n)$  une famille de sous-espaces vectoriels telle que leur somme soit directe. Soient  $(F_1, \dots, F_n)$  une autre famille de sous-espaces vectoriels telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on ait  $F_i \subset H_i$ .

- Montrer que la somme des sous-espaces  $F_i$  est directe.
- Montrer que, si  $H_1 \oplus \dots \oplus H_n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$  alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $F_i = H_i$ .

**Exercice 5.9 :**

- Soit  $E$  un espace vectoriel. Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent.

Montrer que le noyau et l'image de  $f$  sont stables par  $g$ .

- Dans cette question, on suppose que  $g$  est une projection d'image  $F$  et de noyau  $G$ .  
Montrer que, si  $F$  et  $G$  sont stables par  $f$ , alors  $f \circ g = g \circ f$ .

**Exercice 5.10 :**

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $\begin{cases} f \circ g = f \\ g \circ f = g \end{cases}$  si, et seulement si,  $f$  et  $g$  sont des projections de même noyau.

**Exercice 5.11 :**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ . Pour tout  $x \in E$ , la famille  $(x, f(x))$  est liée.

Montrer que  $f$  est une homothétie.

**Exercice 5.12 :**

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $f^2 = f$  et  $g \circ f = 0$ .

Montrer que  $\text{Im}(f + g) = \text{Im } f + \text{Im } g$ .

**5.8 Corrigé des exercices****Corrigé de l'exercice 5.1 :**

- $F = \mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . En effet, la suite nulle est dans  $F$  et les propriétés de la limite de suites convergentes montre la stabilité de  $F$  par combinaison linéaire.
- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente vers un réel  $a$ , alors, pour tout entier  $n$ , en posant  $v_n = u_n - a$ , on obtient  $u_n = v_n + a$ , où  $(v_n) \in \mathcal{C}_0$  et bien sûr  $a \in \mathbb{R}$ .  
Enfin si  $(u_n) \in \mathcal{C}_0 \cap \mathbb{R}$  alors  $(u_n)$  est une suite constante de limite nulle donc  $(u_n)$  est la suite nulle.

**Corrigé de l'exercice 5.2 :**

a. Les endomorphismes  $3\text{Id}_E$  et  $4\text{Id}_E$  sont des éléments de  $\mathcal{A}$ .

b. Si  $f$  vérifie  $f^2 - 7f + 12\text{Id}_E = 0$  alors  $f \circ \left(\frac{-1}{12}(f - 7\text{Id}_E)\right) = \left(\frac{-1}{12}(f - 7\text{Id}_E)\right) \circ f = \text{Id}_E$  ce qui prouve que  $f$  est bijective et  $f^{-1} = \frac{-1}{12}(f - 7\text{Id}_E)$ .

c. On prend  $f \in \mathcal{A}$ .

(i) On a :

$$\begin{aligned} p^2 &= (f - 3\text{Id}_E)^2 = f^2 - 6f + 9\text{Id}_E \\ &= 7f - 12\text{Id}_E + (-6f + 9\text{Id}_E) \\ &= f - 3\text{Id}_E = p. \end{aligned}$$

Donc  $p$  est un projecteur.

(ii) Pour que  $q^2 = a^2(-f + 4\text{Id}_E) = q = f - 4\text{Id}_E$  il suffit que  $-a^2 = a$  soit  $a = -1$ . Ainsi  $q = -f + 4\text{Id}_E$  est un projecteur de  $E$ .

(iii) On a  $p \circ q = q \circ p = 0$  et  $p + q = \text{Id}_E$ .

(iv) — Pour tout  $x \in E$ , la dernière relation montre que  $x = p(x) + q(x)$ .

— La relation  $p \circ q = 0$  est équivalente à  $\text{Im } q \subset \text{Ker } p$  et  $q \circ p = 0$  revient à dire que  $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ . Par conséquent  $p(x) + q(x) \in \text{Ker } q + \text{Ker } p = \text{Ker } p + \text{Ker } q$ . On a :

$$E \subset \text{Ker } p + \text{Ker } q.$$

L'inclusion réciproque est évidente et  $E = \text{Ker } p + \text{Ker } q$ .

— Soit  $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$  alors  $f(x) = 3x = 4x$  donc  $x = 0$ .

— On a démontré que  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Ker } q$ . On retrouve le lemme des noyaux.

(v) On a vu que  $p$  et  $q$  commutent. Sachant que  $f = 4p + 3q$ , par la formule du binôme, on a :

$$f^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k 3^{n-k} p^k q^{n-k}.$$

Or,  $p \circ q = 0$ ,  $p^2 = p$  et  $q^2 = q$ , donc, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f^n = 4^n p + 3^n q.$$

Par suite, avec les définitions de  $p$  et  $q$ , on a :

$$f^n = 4^n (f - 3\text{Id}_E) - 3^n (f - 4\text{Id}_E),$$

qu'on peut écrire :

$$f^n = (4^n - 3^n) f + (4 \times 3^n - 3 \times 4^n) \text{Id}_E,$$

relation vraie aussi pour  $n = 0$ .

- (vi) Sachant que  $f$  est bijective, et que  $(f - 3\text{Id}_E) \circ (f - 4\text{Id}_E) = 0$ , on obtient en composant par  $f^{-1}$  à gauche puis à droite :

$$\left(f^{-1} - \frac{1}{3}\text{Id}_E\right) \circ \left(f^{-1} - \frac{1}{4}\text{Id}_E\right) = 0,$$

de sorte que, en utilisant les démarches ci-dessus et en faisant quelques efforts de calcul, avec les projecteurs  $p = 4\text{Id}_E - 12f^{-1}$  et  $q = 12f^{-1} - 3\text{Id}_E$  et  $n > 0$ , on obtient :

$$f^{-1} = \frac{1}{4}p + \frac{1}{3}q$$

d'où :

$$f^{-n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n p + \left(\frac{1}{3}\right)^n q.$$

### Corrigé de l'exercice 5.3 :

Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on a  $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$  et  $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$ .

- a. — Supposons  $E = \text{Ker } u + \text{Im } u$ . Soit  $x \in \text{Im } u$ . Il existe  $y \in E$  tel que  $x = u(y)$ . Par hypothèse, il existe  $y_1 \in \text{Im } u$  et  $y_2 \in \text{Ker } u$  tel que  $y = y_1 + y_2$  et on a :

$$x = u(y_1 + y_2) = u(y_1) + u(y_2) = u(y_1).$$

Or, comme  $y_1 \in \text{Im } u$ , il existe  $z \in E$  tel que  $y_1 = u(z)$  et on a  $x = u^2(z)$  ce qui signifie que  $x \in \text{Im } u^2$  et donc  $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$  et sachant que  $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$ , on a l'égalité.

— Réciproquement, supposons que  $\text{Im } u^2 = \text{Im } u$ .

Soit  $x \in E$ , alors  $u(x) \in \text{Im } u = \text{Im } u^2$ . On en déduit qu'il existe  $y \in E$  tel que  $u(x) = u^2(y)$ . On a  $u(x - u(y)) = 0$ , donc  $x - u(y) \in \text{Ker } u$ . En posant  $z = x - u(y)$ ,  $x = z + u(y) \in \text{Ker } u + \text{Im } u$ . Finalement :

$$E = \text{Ker } u + \text{Im } u.$$

- b. — Supposons  $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0\}$ . On sait que  $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$ . Soit  $x \in \text{Ker } u^2$ , on a  $u^2(x) = 0$  donc  $u(x) \in \text{Ker } u$ . Mais  $u(x) \in \text{Im } u$ . On a  $u(x) \in \text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0\}$  donc  $u(x) = 0$  et  $x \in \text{Ker } u$ , ce qui prouve que  $\text{Ker } u^2 \subset \text{Ker } u$ . On a montré que  $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ .

— Réciproquement, supposons que  $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ . Soit  $x \in \text{Im } u \cap \text{Ker } u$ . Il existe  $y \in E$  tel que  $x = u(y)$  et  $u(x) = 0$ . Par suite  $u^2(y) = 0$  et ainsi  $y \in \text{Ker } u^2 = \text{Ker } u$ . On a  $x = u(y) = 0$ . On a montré que  $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0\}$ .

- c. Finalement  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$  si, et seulement si,  $\begin{cases} \text{Im } u^2 = \text{Im } u \\ \text{Ker } u^2 = \text{Ker } u \end{cases}$ .

### Corrigé de l'exercice 5.4 :

- a. Comme  $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ , on a  $q \circ p = 0$ . Nous allons noter  $pq$  l'endomorphisme  $p \circ q$ . On a, sachant que  $p^2 = p, q^2 = q, qp = 0$  :

$$\begin{aligned} r^2 &= (p + q - pq)(p + q - pq) \\ &= p^2 + pq - p^2q + qp + q^2 - qpq - pqp - pq^2 + pqpq \\ &= p + pq - pq + q - pq = r \end{aligned}$$

et  $r$  est bien un projecteur.

b. — Si  $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$ , alors  $x \in \text{Ker } r$ , donc  $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \subset \text{Ker } r$ . Montrons l'inclusion inverse.

On remarque que  $pr = p^2 = p$  et  $qr = q^2 = q$ , par conséquent  $\text{Ker } r \subset \text{Ker } p$  et  $\text{Ker } r \subset \text{Ker } q$ , donc  $\text{Ker } r \subset \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$  ce qui montre que :

$$\text{Ker } r = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q.$$

— Comme  $r = p + q - pq$ , on a  $\text{Im } r \subset \text{Im } p + \text{Im } q$ . Réciproquement, soit  $x \in \text{Im } p + \text{Im } q$ , il existe  $x_1 \in \text{Im } p$  et  $x_2 \in \text{Im } q$  tel que  $x = x_1 + x_2$ . On a alors,  $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1 + p(x_2)$  car  $p^2 = p$ , puis  $q(x) = q(x_1) + q(x_2) = x_2$  car  $q^2 = q$  et  $qp = 0$ , enfin  $pq(x) = pq(x_1) + pq(x_2) = p(x_2)$ . Finalement, on a, pour tout  $x \in E$  :

$$r(x) = x_1 + p(x_2) + x_2 - p(x_2) = x.$$

Il en résulte que  $x \in \text{Im } r$ .

On a aussi  $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0\}$  car  $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$ . En effet, si  $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$  alors  $q(x) = 0$ , mais il existe  $x' \in E$  tel que  $x = q(x')$  donc  $q(x) = q^2(x') = q(x') = x = 0$ . On a montré que :

$$\text{Im } r = \text{Im } p \oplus \text{Im } q.$$

### Corrigé de l'exercice 5.5 :

a. Soit  $x \in (L \cap M) + (L \cap N)$ . Il existe  $x_1 \in L \cap M$  et  $x_2 \in L \cap N$  tels que  $x = x_1 + x_2$ . Comme  $x_1$  et  $x_2$  sont dans  $L$ , sous-espace de  $E$ , on a  $x = x_1 + x_2 \in L$ . En outre, comme  $x_1 \in M$  et  $x_2 \in N$ , on a  $x = x_1 + x_2 \in M + N$ , par suite  $x \in L \cap (M + N)$ , ce qui donne l'inclusion.

b. Prenons  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $L = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ,  
 $M = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$  et  $N = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . On a :

$$L \cap M = \{0\} \text{ et } L \cap N = \{0\} \text{ donc } (L \cap M) + (L \cap N) = \{0\}.$$

Puis  $M + N = \mathbb{R}^2$  et  $L \cap (M + N) = L$ , ce qui prouve que l'inclusion peut ne pas être une égalité.

### Corrigé de l'exercice 5.6 :

—  $\text{Ker } \varphi$  est l'ensemble des polynômes constants, donc elle n'est pas injective et par conséquent elle ne peut être bijective.

Par contre  $\varphi$  est surjective puisque tout polynôme admet une primitive polynomiale.

— Pour tout polynôme non nul  $P$ , on a  $\deg(\psi(P)) = \deg P + 1$ . On en déduit que le polynôme 1 n'a pas d'antécédent et  $\psi$  n'est pas surjective. Si  $P \in \text{Ker } \psi$  alors  $XP = 0$ , ce qui est impossible sauf si  $P = 0$ , donc  $\psi$  est injective.

— On remarque que le théorème sur les endomorphismes d'espace vectoriel de dimension finie qui dit qu'une application injective ou surjective est aussi bijective est faux en dimension infinie.

**Corrigé de l'exercice 5.7 :**

a. **Existence :** On a  $E = S \oplus \text{Im } u$ , par suite, pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in S$  et  $t \in \text{Im } u$  tels que  $x = y + t$ . Comme  $t \in \text{Im } u$ , il existe  $a \in E$  tel que  $t = u(a)$ .

Mais il existe  $z \in S$  et  $b \in \text{Im } u = \text{Ker } u$  tels que  $a = z + b$ , donc  $t = u(a) = u(z)$ . Finalement, pour tout  $x \in E$ ,

$$x = y + u(z), \quad (y, z) \in S^2.$$

**Unicité :** Si  $x = y' + u(z')$  avec  $(y', z') \in S^2$ , alors  $y - y' = u(z' - z) \in \text{Im } u \cap S = \{0\}$ . Il en résulte que  $y - y' = 0$  et  $z' - z \in \text{Ker } u$ . Il s'ensuit que  $z' - z \in S \cap \text{Ker } u = S \cap \text{Im } u = \{0\}$ . On a ainsi  $y' = y$  et  $z' = z$ .

b. — Montrons la linéarité de  $v$ . Soient  $x$  et  $x'$  dans  $E$  qui s'écrivent  $x = y + u(z)$  et  $x' = y' + u(z')$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$x + \lambda x' = y + u(z) + \lambda y' + \lambda u(z') = \underbrace{(y + \lambda y')}_{\in S} + u \left( \underbrace{z + \lambda z'}_{\in S} \right).$$

D'autre part,  $z = v(x)$ ,  $z' = v(x')$  et  $z + \lambda z' = v(x + \lambda x')$ , par conséquent, l'unicité de la décomposition entraîne que  $v(x) + \lambda v(x') = v(x + \lambda x')$  et  $v$  est linéaire.

— Soit  $x = y + u(z)$ . On sait que  $z = v(x)$  et  $\text{Ker } u = \text{Im } u$  donc  $u^2 = 0$ . Par conséquent :

$$(u \circ v + v \circ u)(x) = u(z) + v \circ u(x) = u(z) + v \circ u(y).$$

Comme  $y \in S$  et sachant que  $u(y) = 0 + u(y)$ , on a par définition de  $v$  et  $w$  que  $y = v(u(y))$  et  $0 = w(u(y))$ , on en déduit que :

$$u(z) + v \circ u(y) = u(z) + y = x.$$

On a ainsi :

$$u \circ v + v \circ u = \text{Id}_E.$$

c. — Pour la linéarité de  $w$ , on reprend les calculs vus dans b.

$$x + \lambda x' = \underbrace{(y + \lambda y')}_{\in S} + u \left( \underbrace{z + \lambda z'}_{\in S} \right),$$

or  $y + \lambda y' = w(x) + \lambda w(x')$  et  $(y + \lambda y') = w(x + \lambda x')$  et l'unicité de la décomposition nous donne la linéarité de  $w$ .

— Réduisons  $u \circ w$ .

Par définition de  $v$  et  $w$ , on a :

$$\text{Id}_E = w + u \circ v,$$

donc  $u = u \circ w + u^2 \circ v = u \circ w$  car on a vu que  $u^2 = 0$ .

Réduisons  $w \circ u$ .

On a aussi  $0 = u^2 = u \circ w \circ u$ . Ainsi,  $\text{Im}(w \circ u) \subset \text{Ker } u = \text{Im } u$  et  $\text{Im}(w \circ u) \subset \text{Im } w \subset \text{Im } u$ . Par suite  $\text{Im}(w \circ u) \subset \text{Im } u \cap S = \{0\}$ . Il s'ensuit que  $w \circ u = 0$ .

On en conclut que :

$$u \circ w + w \circ u = u.$$

d. On sait que  $u^2 = 0$ , donc on a déjà  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ .

Soit  $x \in \text{Ker } u$ , alors  $x = u \circ v(x) + 0 \circ v(x) = u \circ v(x)$  donc  $x \in \text{Im } u$ . On a ainsi :

$$\text{Im } u = \text{Ker } u.$$

e. Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . Soit  $(e_1, \dots, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On définit un endomorphisme en posant  $u(e_1) = u(e_2) = 0$  et  $u(e_3) = e_1$ . On a bien  $u^2 = 0$  et  $\text{Im } u = \mathbb{R}e_1$  strictement contenu dans le sous-espace engendré par  $e_1$  et  $e_2$ . En définissant  $w$  par  $w(e_1) = w(e_2) = 0$  et  $w(e_3) = e_3$ , on vérifie que  $u \circ w + w \circ u = u$ .

### Corrigé de l'exercice 5.8 :

- a. Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$  tel que  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ . Comme pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $F_i \subset H_i$ , on a  $(x_1, \dots, x_n) \in H_1 \times \dots \times H_n$  et comme la somme des  $H_i$  est directe, il en découle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i = 0$ .
- b. Montrons, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , que  $H_i \subset F_i$ . Soit  $y_i \in H_i$ . On a  $y_i \in H_1 \oplus \dots \oplus H_n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ . Par suite, il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$  tel que  $y_i = x_1 + \dots + x_n$ . On obtient alors, en posant  $z_k = y_k$  si  $k \neq i$  et  $z_i = x_i - y_i$  :

$$\sum_{k=1}^n z_k = 0.$$

Comme la somme des  $F_i$  est directe, on a  $z_k = y_k = 0$  si  $k \neq i$  et  $z_i = x_i - y_i = 0$  donc  $y_i = x_i \in F_i$ . Ce qui montre que  $H_i \subset F_i$  pour tout  $i$ .

### Corrigé de l'exercice 5.9 :

- a. On sait que  $f \circ g = g \circ f$ .
- Montrons que  $\text{Ker } f$  est stable par  $g$ . Soit  $x \in \text{Ker } f$ . On a  $f(x) = 0$ , donc  $g(f(x)) = 0$ ; or  $f \circ g(x) = g \circ f(x) = 0$ , donc  $g(x) \in \text{Ker } f$ .
  - Montrons que  $\text{Im } f$  est stable par  $g$ . Soit  $y \in \text{Im } f$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . On a alors  $g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x)$  par conséquent  $g(y) \in \text{Im } f$ .
  - Il est clair que le noyau et l'image de  $g$  sont stables par  $f$ .
- b. On suppose que  $F = \text{Im } g$  et  $G = \text{Ker } g$  sont stables par  $f$ .
- Soit  $x \in G$ . On a  $f \circ g(x) = f(g(x)) = 0$  car  $g(x) = 0$ , puis  $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0$  car  $f(x) \in G$  puisque  $G$  est stable par  $f$ . On a :

$$f \circ g|_G = g \circ f|_G.$$

- Soit  $x \in F$ . On a  $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x)$  car  $F = \text{Im } g = \text{Ker}(g - \text{Id}_E)$  et  $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)$  car  $F$  étant stable par  $f, f(x) \in F$ . On a :

$$f \circ g|_F = g \circ f|_F.$$

Comme  $E = F \oplus G$ , on a  $f \circ g = g \circ f$ .

**Corrigé de l'exercice 5.10 :**

- Supposons que  $\begin{cases} f \circ g = f \\ g \circ f = g \end{cases}$ .

On a  $f \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ g = f$ , et on montre de même pour  $g$ .  
Donc  $f$  et  $g$  sont des projections.

Soit  $x \in \text{Ker } f$ , alors  $g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0$ , donc  $x \in \text{Ker } g$ . On obtient de même  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$  d'où  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ .

- Réciproquement, notons  $F = \text{Ker } f = \text{Ker } g$ .

Si  $x \in F$ , on a  $f \circ g(x) = g \circ f(x) = 0$ .

Si  $x \in \text{Im } f$ , on a  $g \circ f(x) = g(x)$  car  $f$  est un projecteur donc  $f(x) = x$  pour  $x \in \text{Im } f$ ; on a aussi  $f \circ g(x) = f(x)$  pour la même raison.

Sachant que  $E = F \oplus \text{Im } f$ , on a les égalités du système.

**Corrigé de l'exercice 5.11 :**

- Soit  $x \neq 0$ , alors il existe un unique  $\lambda_x \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$ .  
— Soit  $(x, y)$  une famille liée de vecteurs non nuls. On a  $y = \alpha x$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}^*$ . On a alors  $f(y) = \lambda_y y$  et aussi  $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$ . Par suite :

$$(\lambda_x - \lambda_y) y = 0.$$

Comme  $y \neq 0$ , on en déduit que  $\lambda_x = \lambda_y$ .

- Soit  $(x, y)$  une famille libre. On a alors  $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$  et  $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ . Par conséquent :

$$(\lambda_x - \lambda_{x+y}) x + (\lambda_y - \lambda_{x+y}) y = 0.$$

Comme la famille  $(x, y)$  est libre, on a  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$ .

- Finalement, pour tout  $x \neq 0$ ,  $x \mapsto \lambda_x$  est une application constante que nous notons  $\lambda$ . On a donc, pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = \lambda x$ , relation vraie aussi pour  $x = 0$ .  $f$  est une homothétie ou l'application nulle.

**Corrigé de l'exercice 5.12 :**

- On a toujours  $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ .  
— Soit  $x \in \text{Im } f$ , comme  $f^2 = f$ ,  $f$  est une projection par suite  $f(x) = x$ . Comme  $g \circ f = 0$ , on a  $g \circ f(x) = 0$ . Par conséquent  $x = (f + g)(x) \in \text{Im}(f + g)$  et  $\text{Im } f \subset \text{Im}(f + g)$ .  
— Soit  $y \in \text{Im } g$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $y = g(x)$ . On sait que  $f(x - f(x)) = 0$  et  $g(x - f(x)) = g(x)$ , par conséquent  $g(x) = f(x - f(x)) + g(x - f(x))$  et  $\text{Im } g \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ .  
— Comme  $\text{Im } f \subset \text{Im}(f + g)$  et  $\text{Im } g \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ , il en découle que  $\text{Im } f + \text{Im } g \subset \text{Im}(f + g)$  et l'égalité en découle avec le premier point.



Pierre Burg

# Algèbre et géométrie

CAPES et Agrégation

L'ouvrage présente tout le **nouveau programme d'algèbre et de géométrie** au CAPES externe et à l'Agrégation interne de mathématiques avec un **cours complet** et **plus de 200 démonstrations, exemples et exercices corrigés**. Il permet aux candidats de maîtriser le programme d'algèbre et de géométrie commun aux deux concours et de s'entraîner aux épreuves.

## Sommaire

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| 1. Nombres complexes                                 | 7. Matrice                         |
| 2. Structures algébriques usuelles                   | 8. Déterminant                     |
| 3. Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs | 9. Réduction des endomorphismes    |
| 4. Polynômes – Fractions rationnelles                | 10. Formes bilinéaires symétriques |
| 5. Espace vectoriel : généralités                    | Géométrie euclidienne              |
| 6. Espace vectoriel en dimension finie               | Espace euclidien orienté           |
| Géométrie affine                                     | Index                              |

Agrégé de mathématiques, professeur hors classe, **Pierre Burg** a été membre du jury du CAPES et du CAPESA durant de nombreuses années. Colleur en classes préparatoires MP et MP\*, il intervient également au CNED dans la préparation du CAPES de mathématiques.

ISBN 978-2-311-00500-4



[WWW.VUIBERT.FR](http://WWW.VUIBERT.FR)

