Pierre Burg

CAPES EXTERNE
AGRÉGATION INTERNE
MATHÉMATIQUES

Algèbre et géométrie

CAPES et Agrégation

- Conforme au nouveau programme
- Cours complet
- Plus de 200 exercices corrigés

Vuibert

Table des matières

CHAPITRE 5

Espace vectoriel : généralités

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I désigne un ensemble non vide quelconque et n un entier non nul.

5.1 Définition

Définition 5.1 Un ensemble E sur lequel on a défini une loi interne $+$ et une loi externe $\cdot$, produit par un scalaire de $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :
- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- Pour tout λ, μ dans $\mathbb{K}$ et pour tout x, y dans E,

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, 1.x = x.$$

  Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, et l'élément neutre du groupe additif est le vecteur nul noté 0.

Remarque : Il arrive qu'on surmonte les vecteurs d'une flèche, c'est le cas parfois du vecteur nul pour le distinguer du scalaire nul.

Exemples 5.1
- L'ensemble des vecteurs de la géométrie de l'espace usuel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; les opérations étant l'addition usuelle des vecteurs et le produit des vecteurs par un réel.
- L'ensemble des n-uplets $\mathbb{K}^n, n \geqslant 1$ muni de l'addition usuelle des n-uplets

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

  et du produit d'un n-uplet par un scalaire

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

  est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, ainsi que l'ensemble des fonctions polynômes $\mathbb{K}[x]$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions P définies sur

$\mathbb{K}$ par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, où les coefficients a_k sont dans $\mathbb{K}$, sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

— Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$.
L'ensemble des fonctions réelles définies sur un intervalle I, solutions de l'équation différentielle

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

— L'ensemble des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions P définies par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ pour tout réel x où les coefficients a_k et b_k sont réels, est un espace vectoriel réel.

— L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à $n \geqslant 1$ lignes et $p \geqslant 1$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^I$ des applications d'une partie I non vide quelconque vers $\mathbb{K}$.

— Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ alors E est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.

— Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),\\ \lambda(x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).\end{aligned}$$

Il est appelé *espace vectoriel produit.*

— Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Sur $E \times E$, on définit l'addition usuelle :

$$(x, x') + (y, y') = (x + x', y + y')$$

et la multiplication par les scalaires de $\mathbb{C}$:

$$(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)\,.$$

$E \times E$ muni de ces deux lois a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ appelé le *complexifié de E.*

5.1.1 Sous-espace vectoriel

Définition 5.2 Une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si :

— $0_E \in F$.

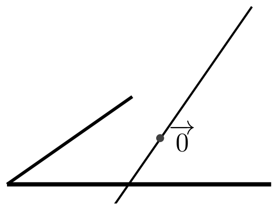
— Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout x, y dans E, $x + y \in F$ et $\lambda x \in F$.

La seconde propriété dit que F est *stable par combinaison linéaire* et on peut la traduire par, pour tout λ et μ dans $\mathbb{K}$ et tout x, y dans E, $\lambda x + \mu y \in F$.

Remarque :

La partie de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments (x, y, z) vérifient $ax + by + cz = 0$, où a, b, c sont des réels donnés, est un sous-espace de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$.

Géométriquement, dans l'espace affine usuel, muni d'un repère, les sous-espaces vectoriels sont les droites et les plans passant par l'origine.



Théorème 5.3 *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.*

Exemples 5.2 Soit H l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < +\infty$. H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration

— H est non vide, la suite nulle étant clairement dans H.

— Soit $X \in H$, ce qui signifie que $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \leqslant A$.

Soit $Y \in H$, ce qui signifie que $Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2 \leqslant B$.

Sachant que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^2 \leqslant 2\left(a^2 + b^2\right).$$

La suite $X + Y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie par addition d'inégalités, pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n}(x_k + y_k)^2 \leqslant 2\sum_{k=0}^{n}(x_k^2 + y_k^2) \leqslant 2(A + B)$.

Par suite, la suite $X + Y \in H$.

— Soit $X \in H$, ce qui signifie que $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \leqslant A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

La suite $\lambda X = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda x_k)^2 = \lambda^2 \sum_{k=0}^{n} x_k^2 \leqslant \lambda A.$$

Par suite $\lambda X \in H$.

— H est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc aussi un espace vectoriel réel.

$\square$

Définition 5.4 $\mathbb{K}^{(I)}$ désigne le sous-ensemble de $\mathbb{K}^I$ formé des éléments $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini, c'est-à-dire, tels que $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est fini.

Théorème 5.5 $\mathbb{K}^{(I)}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Démonstration Il suffit de montrer que $\mathbb{K}^{(I)}$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^I$.

$\mathbb{K}^{(I)}$ contient le vecteur nul de $\mathbb{K}^I$. On rappelle que le vecteur nul est la suite $(x_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, x_i = 0$. Cette suite est bien sûr à support fini.

Toute combinaison linéaire de deux familles à support fini est encore à support fini ; en effet le support est contenu dans la réunion des supports des deux familles.

□

Proposition 5.6 Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Notons $F = \bigcap_{i\in I} F_i$.

— Le vecteur 0 appartient à F_i pour tout $i \in I$, donc $0 \in F$.
— Soient $x \in F$ et $y \in F$, par suite $\forall i \in I, x + y \in F_i$, donc $x + y \in F$.
— Soient $x \in F$ et $\lambda\lambda \in \mathbb{K}$, par suite $\forall i \in I, \lambda x \in F_i$, donc $\lambda x \in F$.

□

Exemples 5.3 n et p sont des entiers non nuls. Considérons le système linéaire homogène de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ dans $\mathbb{K}$, de coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, où $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$:

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad (S)$$

L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$. En effet, pour tout entier i, l'ensemble $F_i = \left\{ (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mid \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = 0 \right\}$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^p$ et l'ensemble des solutions est $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$.

Définition 5.7 Soient E un espace vectoriel et x, y des éléments de E.
y est *colinéaire* à x s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, y et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E.
y est *combinaison linéaire* de $x_1, \ldots, x_n$ s'il existe n scalaires λ_1, …, λ_n tels que :

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Plus généralement : soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaire à support fini, la somme $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i$ est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs u_i à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque : Une partie non vide F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F est stable par combinaison linéaire.

Proposition 5.8 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F une partie de E.
F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :
— $F \neq \emptyset$,
— $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in E$.

Exemples 5.4 La partie $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

En effet F est non vide car la suite nulle est bien dans F.

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et tout (u_n) et (v_n) dans F, $\lambda(u_n) + \mu(v_n) = (\lambda u_n + \mu v_n)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} &= \lambda \left(nu_{n+1} + u_n\right) + \mu \left(nv_{n+1} + v_n\right) \\ &= n \left(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}\right) + \left(\lambda u_n + \mu v_n\right). \end{aligned}$$

5.1.2 Sous-espace engendré

Proposition 5.9 Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'ensemble, noté $\mathrm{Vect}(A)$, des combinaisons linéaires de vecteurs $u_i \in A$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé *sous-espace engendré* par A.

Si $A = \{u_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $\mathrm{Vect}(A) = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k, \lambda_k \in \mathbb{K}\right\}$.

Démonstration
— $\mathrm{Vect}(A)$ est non vide car A contient au moins un vecteur.
— Soient X et Y dans $\mathrm{Vect}(A)$ et λ et μ dans $\mathbb{K}$; par définition, il existe deux parties finies J_X, J_Y dans I telles que $X = \sum_{k\in J_X} \lambda_k u_k$ et $Y = \sum_{k\in J_Y} \mu_k v_k$, λ_k, μ_k étant dans $\mathbb{K}$ et u_k, v_k dans A.
Alors $\lambda X + \mu Y = \sum_{k\in J_X} \lambda\lambda_k u_k + \sum_{k\in J_Y} \mu\mu_k v_k$ est bien une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de A.
— $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E et clairement $A \subset \mathrm{Vect}(A)$.

□

Remarque : On peut montrer que Vect(A) est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. Pour cela on démontre que $\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{sev de} E \\ A \subset F}} F$.

Théorème et définition 5.10 n est un entier au moins égal à 2 et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

L'ensemble $\sum_{k=1}^{n} F_k = \left\{ \sum_{k=1}^{n} u_k \,\middle|\, (u_1, \ldots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples 5.5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{K}_k[X] = \mathbb{K}_n[X]$ car, pour tout entier i, $\mathbb{K}_i[X] \subset \mathbb{K}_{i+1}[X]$.

Proposition 5.11 A et B sont deux parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On a :

1. $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
2. A est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $\mathrm{Vect}(A) = A$.
3. $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{Vect}(A)\right) = \mathrm{Vect}(A)$.
4. $\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.

Remarque : Le point 4 s'étend à une réunion finie de parties et on a pour la famille de sous-espaces vectoriels F_i, $\mathrm{Vect}\left(\cup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} F_i$. En particulier, pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K} u_i$.

Démonstration Nous démontrons le point 4.

Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on a $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$ et $\mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$ donc $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Vect}(A \cup B)$, il existe une famille $\lambda \in \mathbb{K}^{(I)}$ et une famille $u_i, i \in I$ de vecteurs de $A \cup B$ telles que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$. Cette somme étant finie, on regroupe les vecteurs selon leur appartenance à A et B et par suite x est somme d'un vecteur de $\mathrm{Vect}(A)$ et $\mathrm{Vect}(B)$. □

Exemples 5.6 Soient u et v deux vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, alors $\mathrm{Vect}\{u\} = \mathbb{K}u$ et $\mathrm{Vect}\{u, v\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.

Si u est colinéaire à v alors $\mathrm{Vect}\{u, v\} = \mathbb{K}u$.

5.2 Application linéaire

Définition 5.12 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Une application f de E vers F est *linéaire* si :
— $\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$,
— $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Vocabulaire

— On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.
— Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E vers E, on note $\mathcal{L}(E)$ leur ensemble.
— Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective, E et F sont dits isomorphes.
— Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif, on note $\mathrm{GL}(E)$ leur ensemble.
— Une *forme linéaire* est une application linéaire de E vers $\mathbb{K}$, on note E^* leur ensemble appelé le *dual* de E.

Exemples 5.7

— Soit $E_1 \times \cdots \times E_q$ l'espace vectoriel produit de q sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. L'application

$$\varphi : E_1 \times \cdots \times E_q \to E, (x_1, \ldots, x_q) \mapsto \sum_{k=1}^{q} x_i$$

est linéaire.
— Soient a et b deux entiers positifs non nuls. L'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X] \\ \qquad P \mapsto X^2 P'' - (a+b-1) X P' + abP \end{cases}$$

est un endomorphisme.

Conséquences immédiates

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E et toute famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i),$$

ce qui donne une caractérisation des applications linéaires :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Exemples 5.8

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'application de $h_\alpha : E \to E, u \mapsto \alpha u$ est un endomorphisme.
   Si $\alpha \neq 0$, h_α est appelée *homothétie vectorielle*, h_0 est l'application nulle et $h_1 = \mathrm{Id}_E$.
   Pour tout $\alpha \neq 0$, h_α est un automorphisme et $h_\alpha^{-1} = h_{\frac{1}{\alpha}}$.
   Pour tous scalaires α, β, $h_\alpha \circ h_\beta = h_{\alpha\beta} = h_\beta \circ h_\alpha$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'application $i_F : F \to E, u \mapsto u$ est linéaire et appelée *injection canonique*.
3. Soit $E = \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $F = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications définies sur I.
   $$\varphi : E \longrightarrow F, f \mapsto f'$$
   est une application linéaire.
4. Soit $E = \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$.
   $$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$
   est une forme linéaire sur E.
5. Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ un espace vectoriel produit et k un entier entre 1 et n.
   $$p_k : E \longrightarrow E_k, (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_k$$
   est linéaire.

5.2.1 Structure de $\mathcal{L}(E,F)$

Théorème 5.13 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.*
Soient f, g dans $\mathcal{L}(E,F)$ et α, β dans $\mathbb{K}$, alors $\alpha f + \beta g$ est une application linéaire de E vers F et $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

5.3 Noyau et image

Proposition 5.14 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E alors $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F_1 est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

— $0_F = f(0_E)$, donc $0_F \in f(E_1)$.
  Soient $u', v' \in f(E_1)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Il existe alors $u, v \in E_1$ tels que $u' = f(u)$ et $v' = f'(v)$. On a $\alpha u' + \beta v' = \alpha f(u) + \beta f(v) = f(\alpha u + \beta v)$, donc $\alpha u' + \beta v' \in f(E_1)$.
— $0_E \in f^{-1}(F_1)$.
  Soient $u, v \in f^{-1}(F_1)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a alors $f(u), f(v) \in F_1$, donc $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \in F_1$, par conséquent $\alpha u + \beta v \in f^{-1}(F_1)$. □

Proposition 5.15 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A \subset E$ alors $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$.

Démonstration On raisonne par double inclusion.

— $A \subset \text{Vect}(A)$ donc $f(A) \subset \text{Vect}(f(A))$, or $\text{Vect}(f(A))$ est un sous-espace vectoriel de F contenant $f(A)$, donc il contient le plus petit sous-espace contenant $f(A)$, soit $\text{Vect}(f(A)) \subset f(\text{Vect}(A))$.

— On a $f(A) \subset \text{Vect} f(A)$, donc $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\text{Vect} f(A))$. Or $A \subset f^{-1}(f(A))$ donc $A \subset f^{-1}(\text{Vect} f(A))$.
Comme $f^{-1}(\text{Vect} f(A))$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A, on a : $\text{Vect}(A) \subset f^{-1}(\text{Vect} f(A))$, par suite $f(\text{Vect}(A)) \subset f\left(f^{-1}(\text{Vect} f(A))\right)$.
On sait par ailleurs que pour toute partie B, $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ donc :

$$f\left(f^{-1}(\text{Vect} f(A))\right) \subset \text{Vect} f(A),$$

ce qui prouve la seconde inclusion :

$$f(\text{Vect}(A)) \subset \text{Vect} f(A). \qquad \square$$

Exemples 5.9 Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E, on a :

$$f(\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)) = \text{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n)).$$

Ce qui signifie que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images.

Théorème et définition 5.16

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. L'ensemble $f(E) = \{f(u), u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F appelé *image de* f et noté $\text{Im} f$.
2. L'ensemble $f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *noyau de* f et noté $\text{Ker} f$.

Exemples 5.10

1. Soit $\phi : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), f \mapsto f'$. $\text{Ker}\,\phi$ est l'ensemble des fonctions constantes sur I.
2. Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ un espace vectoriel produit et k un entier entre 2 et $n-1$.
$$p_k : E \longrightarrow E_k, (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_k$$
On a $\text{Ker}\, p_k = E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times \{0_{E_k}\} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_n$ et $\text{Im}\, p_k = E_k$.
3. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble
$$E_\lambda = \{u \in E, f(u) = \lambda u\}$$
est un sous-espace vectoriel de E. En effet, E_λ est le noyau de l'application linéaire $f - \lambda \text{Id}_E$.

Exercice Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E tels que $f(A) \subset f(B)$. Montrons que $A + \operatorname{Ker} f \subset B + \operatorname{Ker} f$.

Prenons $x \in A + \operatorname{Ker} f$. Il existe $a \in A$ et $u \in \operatorname{Ker} f$ tels que $x = a + u$. $f(x) = f(a) \in f(A) \subset f(B)$. Il existe donc $b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$, soit $f(x-b) = 0$ et $x - b \in \operatorname{Ker} f$. On a montré que $x = b + \operatorname{Ker} f \in B + \operatorname{Ker} f$.

Proposition 5.17 Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- f est injective si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
- f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} f = F$.

Exemples 5.11
- L'application linéaire $D : \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(I,\mathbb{R}), f \mapsto D(f) = f'$ n'est pas injective car $\operatorname{Ker} D$ est l'ensemble des fonctions constantes sur I.
  Elle n'est pas surjective, car $\operatorname{Im} D = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$; en effet, $g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ appartient à $\operatorname{Im} D$ s'il existe $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telle que $f' = g$, ainsi g est continue sur I et $g \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
  Réciproquement, si g est continue sur I alors elle admet au moins une primitive f dont la dérivée est continue, donc $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.
- Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P - P'$.

  f **est injective :** $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, en effet si $P \in \operatorname{Ker} P$ et si $P \neq 0$ alors $\deg P' < \deg P$; on en déduit que $\deg(P - P') = \deg P$ ce qui montre que $P \neq 0$. Par conséquent $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et f est injective.

  f **est surjective :** On n'utilise pas ici la théorie de la dimension qui serait immédiate. On donne $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in E$. On détermine $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ vérifiant :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k,$$

  ce qui revient à :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k - (k+1)a_{k+1} X^k\right) + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k.$$

  Par suite, nous avons un système échelonné d'inconnues $(a_0, \ldots, a_n)$:

$$\begin{cases} a_n = b_n \\ a_k - (k+1)a_{k+1} = b_k \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \end{cases}$$

  Ce système admet une unique solution obtenue de proche en proche en allant de l'indice n à 0.

5.4 Somme directe

Définition 5.18 Soit $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

Le sous-espace $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ est en *somme directe* si tout vecteur $u \in F$ s'écrit de manière *unique* sous la forme $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ où $u_i \in F_i$.

La somme F est alors notée $F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Le vecteur u_i est appelé *la composante* de u selon F_i.

Remarque : Sachant que l'application $\varphi : F_1 \times \cdots \times F_n \to F, (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} u_k$ est linéaire, la définition revient à dire que φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème 5.19 *Une famille $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de sous-espaces vectoriels de E est en somme directe si, et seulement si, l'une des propositions suivantes est vérifiée :*

1. $$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i = 0 \Rightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0\Big).$$

2. $$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}.$$

Démonstration

1. Supposons que la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ soit directe. Prenons $(u_1, \ldots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ telle que $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$, on sait par ailleurs que $\sum_{i=1}^{n} 0_{F_i} = 0$, alors par unicité de la décomposition on a $\forall i, u_i = 0_{F_i} = 0_E = 0$.
   Réciproquement, supposons que :
   $$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i = 0 \Rightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0\Big)$$
   et supposons qu'un vecteur de $\sum_{i=1}^{n} F_i$ se décompose de deux manières au moins. On a alors :
   $$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} v_i, \quad u_i \in F_i, v_i \in F_i$$
   $$\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i) = 0.$$
   Par conséquent, pour tout $i \leqslant n$, $u_i = v_i$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $u \in \left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1}$, il existe alors des vecteurs $u_i \in F_i, i \leqslant k+1$ tels que $u = \sum_{i=1}^{k} u_i = u_{k+1}$, par suite $\sum_{i=1}^{k} u_i - u_{k+1} = 0_E$ et d'après 1, on a $u_i = 0$ pour tout $i \leqslant k+1$ et $u = 0$.

   Réciproquement, supposons $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \bigcap F_{k+1} = \{0_E\}$, et prenons $u_i \in F_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$.

   On a $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-u_i) \in F_n \bigcap \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_i\right) = \{0_E\}$, et donc $u_n = 0$, puis on réitère cette démarche et on obtient de proche en proche $u_i = 0$ pour tous les entiers i.

□

Exemples 5.12 Dans $\mathbb{K}^n$, les sous-espaces $F = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$ et $G = \mathbb{K}u$, où $u = (1, \ldots, 1)$, sont supplémentaires.

En effet si $x \in F \cap G$, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \lambda$. On trouve facilement que $\lambda = 0$ et donc $x = 0$.

5.4.1 Sous-espaces supplémentaires

Définition 5.20 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont *supplémentaires* si $E = F \oplus G$.

Remarque : F et G sont *supplémentaires* si, et seulement si, tout $u \in E$ s'écrit de façon unique $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in F \times G$ ou encore, si, et seulement si, $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$.

Exemples 5.13

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$ où $n \in \mathbb{N}$. L'idéal (P) engendré par P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. On a $\mathbb{K}[X] = (P) \oplus \mathbb{K}_n[X]$. En effet, pour tout polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ il existe, par la division euclidienne, un unique polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ et un unique polynôme $R \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que $A = QP + R$.
- En particulier, dans l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}[X]$. $E_1 = (X^2+1)\mathbb{R}[X]$ le sous-espace des polynômes multiples du polynôme X^2+1 et $E_2 = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
  On a $\mathbb{R}[X] = E_1 \oplus E_1$.
- Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, E_1 le sous-espace des applications paires et E_2 le sous-espace des applications impaires. E est somme directe de E_1 et E_2.

En effet, pour toute application f, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right),$$

où l' application $x \mapsto \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$ est paire et $x \mapsto \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$ est impaire.
En outre, si $f \in E_1 \cap E_2$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x) = -f(x)$, par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et donc f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

— On montre de façon similaire que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe du sous-espace des matrices symétriques et du sous-espace des matrices anti-symétriques.

On admettra le théorème suivant dont la démonstration nécessite l'axiome du choix.

Théorème 5.21 *Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E il existe au moins un sous-espace G tel que $E = F \oplus G$. G est appelé* sous-espace supplémentaire *de F.*

Remarque : En dehors des sous-espaces E et $\{0\}$, il n'y a jamais unicité du supplémentaire.

Exemples 5.14 Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Soit F le sous-espace vectoriel des fonctions $f \in E$ vérifiant $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$, déterminons un supplémentaire G de F.

Soit $\varphi \in E$, s'il existe $(f,g) \in F \times G$ tel que $\varphi = f + g$ alors :

$$\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t.$$

Par suite si nous posons $f = \varphi - \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$ et $g = \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$, on a une solution. Par suite, si nous prenons pour G les fonctions constantes sur $[0,1]$, on a $E = F + G$. On vérifie facilement que $F \cap G = \{0\}$.

Exercice Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. $\operatorname{Ker} f$ admet un supplémentaire G. Montrons que G et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphes.
La restriction de f à G, notée f_G est une application linéaire de G vers $\operatorname{Im} f$.
f_G est injective. En effet, pour tout $x \in \operatorname{Ker} f_G$, on a $f_G(x) = f(x) = 0$ et $x \in G$. Par suite $x \in \operatorname{Ker} f \cap G = \{0\}$ donc $\operatorname{Ker} f_G = \{0\}$.
f_G est surjective. Pour tout $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; or $x = x' + x''$ avec $x' \in \operatorname{Ker} f$ et $x'' \in G$, donc $y = f(x' + x'') = f(x'')$.
Par suite $y \in f(G) = f_G(G)$.

5.5 Anneau des endomorphismes

Théorème 5.22 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*
$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ *est un anneau non commutatif d'unité l'application* Id_E*. En outre cet anneau n'est pas intègre.*
L'ensemble des endomorphismes inversibles $\mathrm{GL}(E)$ *est un groupe pour la loi* $\circ$*, non commutatif en général.*

Démonstration

— On sait que $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe commutatif, car $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

— La loi $\circ$ est une loi interne, en effet, pour tout f, g dans $\mathcal{L}(E)$, pour tout u, v dans E et tout α, β dans $\mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} g \circ f\,(\alpha u + \beta v) &= g\,(\alpha f(u) + \beta f(v)) \quad \text{linéarité de } f \\ &= \alpha g \circ f(u) + \beta g \circ f(v)) \quad \text{linéarité de } g. \end{aligned}$$

— La loi $\circ$ est toujours associative et Id_E en est un élément neutre.

— La loi $\circ$ est distributive par rapport à la loi $+$. En effet, pour tout f, g, h dans $\mathcal{L}(E)$ et tout u dans E, on a :

$$\begin{aligned} f \circ (g + h)(u) &= f\,(g(u) + h(u)) \quad \text{par définition de l'addition des fonctions} \\ &= f(g(u)) + f(h(u)) \quad \text{linéarité de } f, \end{aligned}$$

donc

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h.$$

On montre de façon analogue, mais la linéarité n'intervient pas, que :

$$(g + h) \circ f = g \circ h + h \circ f.$$

— Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est inversible s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$ ce qui revient à dire que f est bijective d'application réciproque g.
On sait d'autre part que les éléments inversibles d'un anneau forment un groupe, par suite $(\mathrm{Gl}(E), \circ)$ est un groupe.

— Pour voir que $\mathcal{L}(E)$ n'est pas intègre en général, il suffit de prendre $E = E_1 \times E_2$ le produit de deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Les endomorphismes $f : (u_1, u_2) \mapsto (u_1, 0)$ et $g : (u_1, u_2) \mapsto (0, u_2)$ vérifient $f \circ g = 0$ où 0 désigne l'endormorphisme nul.

□

5.5.1 Itérés d'un endomorphisme

Définition 5.23 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, f^1 = f, \quad \forall n \geqslant 2, f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ facteurs}}.$$

Proposition 5.24 Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

1. $\operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$ et $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$.
2. $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$.
3. $(f+g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$, c'est la formule du binôme.
4. $f^n - g^n = (f-g)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

Démonstration Démontrons 1, les autres propriétés étant relativement triviales.
Soit $u \in \operatorname{Ker} f^n$, on a alors $f^n(u) = 0$ d'où $f^{n+1}(u) = f\left(f^n(u)\right) = f(0) = 0$ et $u \in \operatorname{Ker} f^{n+1}$.
Soit $v \in \operatorname{Im} f^{n+1}$, il existe alors $u \in E$ tel que $v = f^{n+1}(u) = f^n\left(f(u)\right)$, ainsi v est l'image de $f(u) \in E$ par l'endomorphisme f^n donc $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$. □

Proposition 5.25 Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

— $g \circ f = 0$.
— $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Démonstration Supposons que $g \circ f = 0$.
Pour tout $v \in \operatorname{Im} f$, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$ alors $g(v) = g\left(f(u)\right) = g \circ f(u) = 0$ et on en tire que $v \in \operatorname{Ker} g$.
Supposons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
Pour tout $u \in E$, $f(u) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$, donc $g\left(f(u)\right) = 0$, par conséquent $g \circ f$ est l'endomorphisme nul. □

Définition 5.26 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

— f est *idempotente* si $f^2 = f$.
— f est *nilpotente* s'il existe un entier $n > 0$ tel que $f^n = 0$. Le plus petit entier n vérifiant cette proposition est appelé *indice de nilpotence* de f.

Exemples 5.15

1. Soit f un endomorphisme nilpotent non nul. Il existe par conséquent un entier $n \geqslant 1$ tel que $f^n = 0$. Montrons que $\operatorname{Id} - f \in \operatorname{GL}(E)$. Sachant que f et Id commutent, on a :
$$\begin{aligned} \operatorname{Id} = \operatorname{Id} - f^n &= (\operatorname{Id} - f) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k\right) \circ (\operatorname{Id} - f)\,. \end{aligned}$$
Par conséquent $\operatorname{Id} - f$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

2. Montrons que l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X]), P \mapsto f(P) = P - P'$ est inversible.

   Notons g l'endomorphisme $P \mapsto P'$. On a alors $f = \mathrm{Id} - g$. g est un endomorphisme nilpotent d'indice $n+1$, donc $f^{n+1} = 0$. On montre comme ci-dessus que :

$$f^{-1} = (\mathrm{Id} - g)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} g^k, \quad \text{soit } \forall P \in \mathbb{K}_n[X], f^{-1}(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)},$$

   où $P^{(k)}$ désigne la k-ième dérivée du polynôme P.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = f$ et $f \neq 0$. Montrons que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

   $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels de E en tant que noyaux d'applications linéaires.

   Si $u \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ alors $f(u) = 0$ et $f(u) - u = 0$ donc $u = 0$ par suite $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

   Pour tout $u \in E$, on a $u = f(u) + (u - f(u))$. Or $f(u) \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ car $(f - \mathrm{Id})(f(u)) = f(u) - f^2(u) = f(u) - f(u) = 0$ et $u - f(u) \in \operatorname{Ker} f$ car $f(u - f(u)) = f(u) - f^2(u) = f(u) - f(u) = 0$. Par suite $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

5.6 Endomorphismes remarquables

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

5.6.1 Homothétie vectorielle

Définition 5.27 On appelle *homothétie vectorielle* de E de rapport $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'endomorphisme de E défini par $h = \lambda \mathrm{Id}$.

Proposition 5.28

1. Pour tout λ et μ dans $\mathbb{K}$, on a $h_\lambda \circ h_\mu = h_\mu \circ h_\lambda = h_{\lambda\mu}$.
2. Une homothétie vectorielle commute avec tout endomorphisme de E.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $h_\lambda \in \mathrm{GL}(E)$ et $h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$.
4. L'ensemble des homothéties de E, $\mathcal{H}(E)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

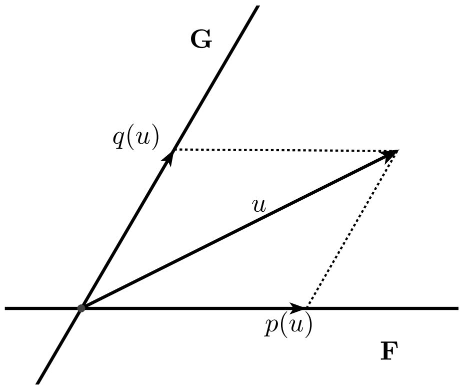
5.6.2 Projection vectorielle

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$: $E = F \oplus G$.
Pour vecteur $u \in E$ il existe un unique vecteur $u' \in F$ et un unique vecteur $u'' \in G$ tel que $u = u' + u''$.

Définition 5.29 On appelle *projection vectorielle* sur F parallèlement à G l'application :

$$p : E \to E, u \mapsto p(u) = u'.$$

On définit de façon analogue la projection vectorielle q de E sur G.



Théorème 5.30

1. *p est un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p$.*
   En outre, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id})$ *et* $\operatorname{Ker} p = G$.
2. $q = \operatorname{Id} - p$, $q^2 = q$ *et* $q \circ p = p \circ q = 0$.

5.6.3 Projecteur

Définition 5.31 On appelle *projecteur* de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ tout endomorphisme vérifiant :

$$f^2 = f.$$

Exemples 5.16 Une projection vectorielle est un projecteur.

Théorème 5.32 *Si f est un projecteur de E alors :*

1. $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$,
2. *f est la projection vectorielle sur* $\operatorname{Im} f$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker} f$.

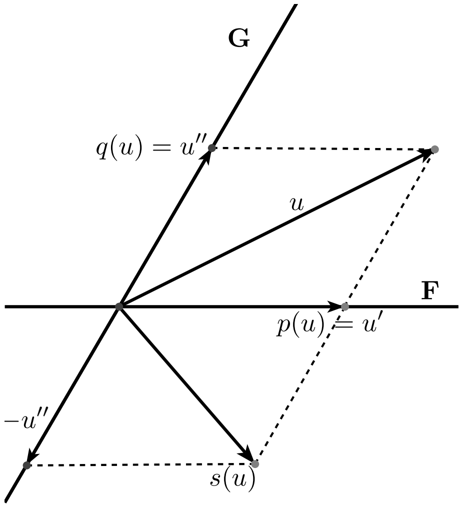
La démonstration a été vue plus haut.

5.6.4 Symétrie vectorielle

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$: $E = F \oplus G$.
Pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique vecteur $u' \in F$ et un unique vecteur $u'' \in G$ tels que $u = u' + u''$.

Définition 5.33 On appelle *symétrie vectorielle* par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : E \to E, u \mapsto s(u) = u' - u''.$$



Théorème 5.34 *L'application s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{Id}$. En outre, $F = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id})$ est le sous-espace des vecteurs invariants et $G = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id})$. Si p désigne la projection sur F parallèlement à G, on a :*

$$s = 2p - \mathrm{Id}.$$

Démonstration

— Soient u et v dans E, il existe alors u', v' dans F et u'', v'' dans G, tous uniques tels que $u = u' + u''$ et $v = v' + v''$. On a :

$$\begin{aligned} s(u+v) &= s\left((u'+v') + (u''+v'')\right) \\ &= (u'+v') - (u''+v'') \\ &= s(u) + s(v) \end{aligned}$$

et de manière analogue, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, s(\lambda u) = \lambda s(u)$.
Pour tout $u \in E$, on a : $s^2(u) = s(u' - u'') = u' + u'' = u$.

— Les vecteurs invariants : Dire que $s(u) = u$ revient à dire $u \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id})$, d'autre part $s(u) = u$ revient à dire $u' - u'' = u' + u''$ soit $u'' = 0$, par suite les vecteurs invariants sont les vecteurs de F.

— Dire que $u \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id})$ revient à dire $s(u) = -u$, c'est-à-dire $u' - u'' = -u' - u''$ soit $u' = 0$. Par suite $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}) = G$.

— Pour tout $u \in E$, on a $s(u) + u = (u' - u'') + (u' + u'') = 2u' = 2p(u)$, ainsi $s = 2p - \mathrm{Id}$.

□

Théorème 5.35 *Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \mathrm{Id}$ alors :*

1. $E = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id})$,
2. *f est la symétrie vectorielle par rapport à $F = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id})$.*

Démonstration

— Soit $u \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id})$, alors $f(u) = u = -u$ donc $u = 0$ et $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}) = \{0\}$

— Par analyse et synthèse, mais on a le droit de connaître le résultat, on montre que, pour tout $u \in E$, on a :

$$u = \frac{1}{2}\,(u + f(u)) + \frac{1}{2}\,(u - f(u))\,.$$

On vérifie que $f\left(\frac{1}{2}\,(u + f(u))\right) = \frac{1}{2}\left(f(u) + f^2(u)\right) = \frac{1}{2}\,(f(u) + u)$, par suite, $\frac{1}{2}\,(u + f(u)) \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ et de manière analogue on a :

$$\frac{1}{2}\,(u - f(u)) \in \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id})\,.$$

— Pour tout $u = \frac{1}{2}\,(u + f(u)) + \frac{1}{2}\,(u - f(u)) \in F + G$, on a alors :

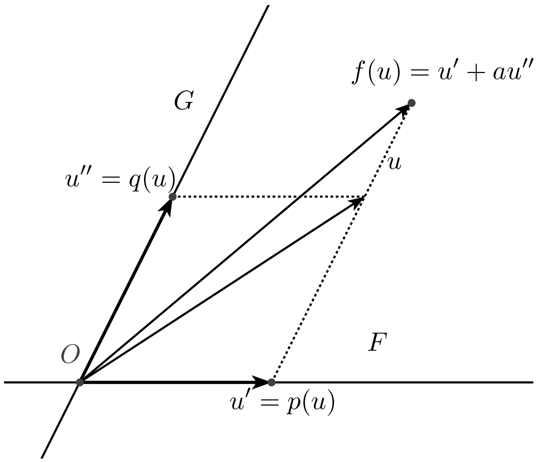
$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{2}\left(f(u) + f^2(u)\right) + \frac{1}{2}\left(fu) - f^2(u)\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(f(u) + u) + \frac{1}{2}\,(fu) - u) \\ &= \frac{1}{2}\,(u + f(u)) - \frac{1}{2}\,(u - fu))\,, \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G. □

5.6.5 Affinité vectorielle

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$: $E = F \oplus G$.
Pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique vecteur $u' \in F$ et un unique vecteur $u'' \in G$ tels que $u = u' + u''$.

Définition 5.36 Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'application $f : E \to E, u \mapsto u' + \alpha u''$ est appelée *affinité vectorielle* par rapport à F parallèlement à G et de rapport α.



Théorème 5.37 *Toute affinité f de E est un endomorphisme et*

$$f = p + \alpha q$$

où p et q sont les projecteurs respectivement sur F et G parallèlement à respectivement G et F.

Exemples 5.17 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\mathrm{Id}_E = 0$. Montrons que f est une affinité.

On a $E = \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$. En effet :

— Pour tout $x \in \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$, on a $f(x) = 3x = x$ donc $x = 0$.

— Tout $x \in E$ se décompose sous la forme :

$$x = \frac{1}{2}\,(3x - f(x)) + \frac{1}{2}\,(f(x) - x)$$

avec $3x - f(x) \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ et $f(x) - x \in \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

Par suite tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = u + v \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

On a $f(u) = u$ et $f(v) = 3v$. Ce qui prouve que f est une affinité de rapport 3 par rapport à $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{id}_E)$.

Plus généralement, si $\alpha \neq 1$ est un scalaire et f un endomorphisme vérifiant :

$$f^2 - (1 + \alpha)f + \alpha\mathrm{id}_E = 0,$$

alors f est une affinité de rapport α.

5.6.6 Somme directe et projecteurs

Le théorème suivant donne une méthode pour construire une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F.

Théorème 5.38 *E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. q est un entier au moins égal à 2.*

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$, et si, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $f_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que la restriction de f à E_i, $f_{|E_i} = f_i$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$.

Démonstration

— Si f existe alors pour tout $u \in E$, $u = \sum_{i=1}^{q} u_i$ où $(u_1, \ldots, u_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q$. Comme f est linéaire :

$$f(u) = \sum_{i=1}^{q} f(u_i) = \sum_{i=1}^{q} f_i(u_i) \quad \text{car } f_{|E_i} = f_i.$$

— Si $u \in E$ et $u = \sum_{i=1}^{q} u_i$, en posant $f(u) = \sum_{i=1}^{q} f_i(u_i)$, on définit bien une application de E vers F, elle est unique car la décomposition de x est unique. En outre f est linéaire :

Soient u et v dans E. $u = \sum_{i=1}^{q} u_i$, $v = \sum_{i=1}^{q} v_i$ où $(u_1, \ldots, u_q)$ et $(v_1, \ldots, v_q)$ sont dans $E_1 \times \cdots \times E_q$.

On a alors $u + v = \sum_{i=1}^{q} (u_i + v_i)$ où $(u_1 + v_1, \ldots, u_q + v_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u = \sum_{i=1}^{q} (\lambda u_i)$ où $(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q$.

$$\begin{aligned} f(u+v) &= \sum_{i=1}^{q} f_i(u_i + v_i) = \sum_{i=1}^{q} (f_i(u_i) + f_i(v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{q} f_i(u_i) + \sum_{i=1}^{q} f_i(v_i) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda u) &= \sum_{i=1}^{q} f_i(\lambda u_i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda f_i(u_i) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{q} f_i(u_i) \right) = \lambda f(u). \end{aligned}$$ □

Corollaire 5.39 Deux applications linéaires, égales sur chacun des espaces d'une décomposition en somme directe, sont égales.

Exemples 5.18

1. On reprend les notations du théorème. $E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$, et pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on définit le projecteur associé à la décomposition $p_i \in \mathcal{L}(E)$ par $p_i(u) = u_i$. On a :

$$p_i^2 = p_i, \operatorname{Im} p_i = E_i \text{ et } \operatorname{Ker} p_i = \bigoplus_{j=1 j \neq i}^{q} E_j.$$

(a) Si $i \neq j$ et k dans $[\![1, q]\!]$, $(p_i \circ p_j)_{|E_k} = 0$, où 0 est l'application linéaire nulle de E_k vers E, par conséquent, par le théorème, on a :

$$p_i \circ p_j = 0.$$

(b) Pour tout j dans $[\![1, q]\!]$, et tout $u_j \in E_j$, $\left(\sum_{i=1}^{q} p_i\right)(u_j) = u_j$ donc la restriction de $\left(\sum_{i=1}^{q} p_i\right)$ à E_j est l'application identité de E_j vers E, par suite :

$$\sum_{i=1}^{q} p_i = \mathrm{Id}_E.$$

2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Considérons l'endomorphisme f de E tel que $\forall u \in F, f(u) = u$ et $\forall u \in G, f(u) = -u$. f est alors parfaitement déterminé ; soit $u = u' + v' \in F \oplus G$, on a alors $f(u) = u' - v'$ et f est la symétrie vectorielle par rapport à F de direction G.
Les propriétés $f^2 = \mathrm{Id}$ et $f = 2p - \mathrm{Id}$ se vérifient facilement sur F et G donc elles sont établies sur $F \oplus G = E$.

5.7 Exercices

Exercice 5.1 :

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles convergentes.

a. Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $\mathcal{C}_0$ le sous-espace des suites convergentes vers 0. Montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathbb{R}$.

Exercice 5.2 :

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $f^2 - 7f + 12\mathrm{Id}_E = 0$.

a. Montrer que $\mathcal{A}$ est non vide.

b. Montrer que tout élément de $\mathcal{A}$ est un automorphisme.

c. On suppose que $f \in \mathcal{A}$.

(i) Vérifier que $p = f - 3\mathrm{Id}_E$ est un projecteur de E.

(ii) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $q = a(f - 4\mathrm{Id}_E)$ est un projecteur non nul de E.

(iii) Que peut-on dire de $p \circ q$, de $q \circ p$, de $p + q$?

(iv) En déduire que :

$$E = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_E).$$

(v) Déterminer f^n en fonction de p et de q ($n \in \mathbb{N}^*$), puis en fonction de f.

(vi) Calculer f^n lorsque $n < 0$.

Exercice 5.3 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E.

a. Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2).$$

b. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2).$$

c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u).$$

Exercice 5.4 :

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q$.

a. Montrer que $r = p + q - p \circ q$ est un projecteur.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}\, r$ et $\mathrm{Im}\, r$ en fonction des noyaux et images de p, q.

Exercice 5.5 :

Soient E un espace vectoriel et L, M, N trois sous-espaces vectoriels de E.

a. Montrer que $(L \cap M) + (L \cap N) \subset L \cap (M + N)$.

b. Montrer que l'inclusion est stricte.

Exercice 5.6 :

Soit $E = \mathbb{K}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soient φ et ψ les endomorphismes de E définies par $\varphi(P) = P'$ et $\psi(P) = XP$.

a. Les applications φ et ψ sont-elles injectives ?

b. Les applications φ et ψ sont-elles surjectives ?

c. Les applications φ et ψ sont-elles bijectives ?

Exercice 5.7 :

Soient E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$ et S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, u$: $E = S \oplus \mathrm{Im}\, u$.

a. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in S^2$ tel que $x = y + u(z)$.

   On pose alors $z = v(x)$ et $y = w(x)$.

b. Montrer que v est linéaire et calculer $u \circ v + v \circ u$.

c. Montrer que w est linéaire et calculer $u \circ w + w \circ u$.

u est un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$ et on suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v + v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

d. A-t-on alors $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$?

e. Construire un endomorphisme non nul u de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^2 = 0$ vérifiant $\mathrm{Im}\, u$ contenu strictement dans $\mathrm{Ker}\, u$. Préciser un endomorphisme simple w tel que $u \circ w + w \circ u = u$.

Exercice 5.8 :

n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $(H_1, \ldots, H_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels telle que leur somme soit directe. Soient $(F_1, \ldots, F_n)$ une autre famille de sous-espaces vectoriels telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait $F_i \subset H_i$.

a. Montrer que la somme des sous-espaces F_i est directe.

b. Montrer que, si $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = H_i$.

Exercice 5.9 :

a. Soit E un espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent.

   Montrer que le noyau et l'image de f sont stables par g.

b. Dans cette question, on suppose que g est une projection d'image F et de noyau G.

   Montrer que, si F et G sont stables par f, alors $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 5.10 :

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que $\begin{cases} f \circ g = f \\ g \circ f = g \end{cases}$ si, et seulement si, f et g sont des projections de même noyau.

Exercice 5.11 :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Montrer que f est une homothétie.

Exercice 5.12 :

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f^2 = f$ et $g \circ f = 0$.

Montrer que $\mathrm{Im}(f + g) = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$.

5.8 Corrigé des exercices

Corrigé de l'exercice 5.1 :

a. $F = \mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet, la suite nulle est dans F et les propriétés de la limite de suites convergentes montre la stabilité de F par combinaison linéaire.

b. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers un réel a, alors, pour tout entier n, en posant $v_n = u_n - a$, on obtient $u_n = v_n + a$, où $(v_n) \in \mathcal{C}_0$ et bien sûr $a \in \mathbb{R}$.

   Enfin si $(u_n) \in \mathcal{C}_0 \cap \mathbb{R}$ alors (u_n) est une suite constante de limite nulle donc (u_n) est la suite nulle.

Corrigé de l'exercice 5.2 :

a. Les endomorphismes $3\mathrm{Id}_E$ et $4\mathrm{Id}_E$ sont des éléments de $\mathcal{A}$.

b. Si f vérifie $f^2-7f+12\mathrm{Id}_E=0$ alors $f\circ\left(\dfrac{-1}{12}(f-7\mathrm{Id}_E\right)=\left(\dfrac{-1}{12}(f-7\mathrm{Id}_E\right)\circ f=$ Id_E ce qui prouve que f est bijective et $f^{-1}=\dfrac{-1}{12}(f-7\mathrm{Id}_E)$.

c. On prend $f\in\mathcal{A}$.

(i) On a :

$$\begin{aligned} p^2=(f-3\mathrm{Id}_E)^2&=f^2-6f+9\mathrm{Id}_E\\ &=7f-12\mathrm{Id}_E+(-6f+9\mathrm{Id}_E)\\ &=f-3\mathrm{Id}_E=p. \end{aligned}$$

Donc p est un projecteur.

(ii) Pour que $q^2=a^2(-f+4\mathrm{Id}_E)=q=f-4\mathrm{id}_E$ il suffit que $-a^2=a$ soit $a=-1$. Ainsi $q=-f+4\mathrm{Id}_E$ est un projecteur de E.

(iii) On a $p\circ q=q\circ p=0$ et $p+q=\mathrm{Id}_E$.

(iv) — Pour tout $x\in E$, la dernière relation montre que $x=p(x)+q(x)$.
— La relation $p\circ q=0$ est équivalente à $\operatorname{Im} q\subset\operatorname{Ker} p$ et $q\circ p=0$ revient à dire que $\operatorname{Im} p\subset\operatorname{Ker} q$. Par conséquent $p(x)+q(x)\in\operatorname{Ker} q+\operatorname{Ker} p=\operatorname{Ker} p+\operatorname{Ker} q$. On a :

$$E\subset\operatorname{Ker} p+\operatorname{Ker} q.$$

L'inclusion réciproque est évidente et $E=\operatorname{Ker} p+\operatorname{Ker} q$.
— Soit $x\in\operatorname{Ker} p\cap\operatorname{Ker} q$ alors $f(x)=3x=4x$ donc $x=0$.
— On a démontré que $E=\operatorname{Ker} p\oplus\operatorname{Ker} q$. On retrouve le lemme des noyaux.

(v) On a vu que p et q commutent. Sachant que $f=4p+3q$, par la formule du binôme, on a :

$$f^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k3^{n-k}p^kq^{n-k}.$$

Or, $p\circ q=0$, $p^2=p$ et $q^2=q$, donc, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$f^n=4^np+3^nq.$$

Par suite, avec les définitions de p et q, on a :

$$f^n=4^n\left(f-3\mathrm{Id}_E\right)-3^n\left(f-4\mathrm{Id}_E\right),$$

qu'on peut écrire :

$$f^n=\left(4^n-3^n\right)f+\left(4\times3^n-3\times4^n\right)\mathrm{Id}_E,$$

relation vraie aussi pour $n=0$.

(vi) Sachant que f est bijective, et que $(f - 3\mathrm{Id}_E) \circ (f - 4\mathrm{Id}_E) = 0$, on obtient en composant par f^{-1} à gauche puis à droite :

$$\left(f^{-1} - \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right) \circ \left(f^{-1} - \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right) = 0,$$

de sorte que, en utilisant les démarches ci-dessus et en faisant quelques efforts de calcul, avec les projecteurs $p = 4\mathrm{Id}_E - 12f^{-1}$ et $q = 12f^{-1} - 3\mathrm{Id}_E$ et $n > 0$, on obtient :

$$f^{-1} = \frac{1}{4}p + \frac{1}{3}q$$

d'où :

$$f^{-n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n p + \left(\frac{1}{3}\right)^n q.$$

Corrigé de l'exercice 5.3 :

Pour tout endomorphisme u de E, on a $\mathrm{Im}\, u^2 \subset \mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2$.

a. — Supposons $E = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u$. Soit $x \in \mathrm{Im}\, u$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Par hypothèse, il existe $y_1 \in \mathrm{Im}\, u$ et $y_2 \in \mathrm{Ker}\, u$ tel que $y = y_1 + y_2$ et on a :

$$x = u(y_1 + y_2) = u(y_1) + u(y_2) = u(y_1).$$

Or, comme $y_1 \in \mathrm{Im}\, u$, il existe $z \in E$ tel que $y_1 = u(z)$ et on a $x = u^2(z)$ ce qui signifie que $x \in \mathrm{Im}\, u^2$ et donc $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}\, u^2$ et sachant que $\mathrm{Im}\, u^2 \subset \mathrm{Im}\, u$, on a l'égalité.

— Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}\, u^2 = \mathrm{Im}\, u$.
Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$. On en déduit qu'il existe $y \in E$ tel que $u(x) = u^2(y)$. On a $u\,(x - u(y)) = 0$, donc $x - u(y) \in \mathrm{Ker}\, u$. En posant $z = x - u(y)$, $x = z + u(y) \in \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u$. Finalement :

$$E = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u.$$

b. — Supposons $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$. On sait que $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u^2$, on a $u^2(x) = 0$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\, u$. Mais $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$. On a $u(x) \in \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ donc $u(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}\, u$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}\, u^2 \subset \mathrm{Ker}\, u$. On a montré que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$.

— Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$. Soit $x \in \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ et $u(x) = 0$. Par suite $u^2(y) = 0$ et ainsi $y \in \mathrm{Ker}\, u^2 = \mathrm{Ker}\, u$. On a $x = u(y) = 0$. On a montré que $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.

c. Finalement $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$ si, et seulement si, $\begin{cases} \mathrm{Im}\, u^2 = \mathrm{Im}\, u \\ \mathrm{Ker}\, u^2 = \mathrm{Ker}\, u \end{cases}$.

Corrigé de l'exercice 5.4 :

a. Comme $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, q$, on a $q \circ p = 0$. Nous allons noter pq l'endomorphisme $p \circ q$. On a, sachant que $p^2 = p, q^2 = q, qp = 0$:

$$\begin{aligned} r^2 &= (p + q - pq)\,(p + q - pq) \\ &= p^2 + pq - p^2q + qp + q^2 - qpq - pqp - pq^2 + pqpq \\ &= p + pq - pq + q - pq = r \end{aligned}$$

et r est bien un projecteur.

b. — Si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, alors $x \in \operatorname{Ker} r$, donc $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$. Montrons l'inclusion inverse.
On remarque que $pr = p^2 = p$ et $qr = q^2 = q$, par conséquent $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} q$, donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ ce qui montre que :

$$\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q.$$

— Comme $r = p + q - pq$, on a $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, il existe $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Im} q$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a alors, $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1 + p(x_2)$ car $p^2 = p$, puis $q(x) = q(x_1) + q(x_2) = x_2$ car $q^2 = q$ et $qp = 0$, enfin $pq(x) = pq(x_1) + pq(x_2) = p(x_2)$. Finalement, on a, pour tout $x \in E$:

$$r(x) = x_1 + p(x_2) + x_2 - p(x_2) = x.$$

Il en résulte que $x \in \operatorname{Im} r$.
On a aussi $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$ car $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$. En effet, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ alors $q(x) = 0$, mais il existe $x' \in E$ tel que $x = q(x')$ donc $q(x) = q^2(x') = q(x') = x = 0$. On a montré que :

$$\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q.$$

Corrigé de l'exercice 5.5 :

a. Soit $x \in (L \cap M) + (L \cap N)$. Il existe $x_1 \in L \cap M$ et $x_2 \in L \cap N$ tels que $x = x_1 + x_2$. Comme x_1 et x_2 sont dans L, sous-espace de E, on a $x = x_1 + x_2 \in L$. En outre, comme $x_1 \in M$ et $x_2 \in N$, on a $x = x_1 + x_2 \in M + N$, par suite $x \in L \cap (M + N)$, ce qui donne l'inclusion.

b. Prenons $E = \mathbb{R}^2$, $L = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
$M = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ et $N = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. On a :

$$L \cap M = \{0\} \text{ et } L \cap N = \{0\} \text{ donc } (L \cap M) + (L \cap N) = \{0\}.$$

Puis $M + N = \mathbb{R}^2$ et $L \cap (M + N) = L$, ce qui prouve que l'inclusion peut ne pas être une égalité.

Corrigé de l'exercice 5.6 :

— $\operatorname{Ker} \varphi$ est l'ensemble des polynômes constants, donc elle n'est pas injective et par conséquent elle ne peut être bijective.
Par contre φ est surjective puisque tout polynôme admet une primitive polynômiale.

— Pour tout polynôme non nul P, on a $\deg(\psi(P)) = \deg P + 1$. On en déduit que le polynôme 1 n'a pas d'antécédent et ψ n'est pas surjective. Si $P \in \operatorname{Ker} \psi$ alors $XP = 0$, ce qui est impossible sauf si $P = 0$, donc ψ est injective.

— On remarque que le théorème sur les endomorphismes d'espace vectoriel de dimension finie qui dit qu'une application injective ou surjective est aussi bijective est faux en dimension infinie.

Corrigé de l'exercice 5.7 :

a. **Existence :** On a $E = S \oplus \operatorname{Im} u$, par suite, pour tout $x \in E$, il existe $y \in S$ et $t \in \operatorname{Im} u$ tels que $x = y + t$. Comme $t \in \operatorname{Im} u$, il existe $a \in E$ tel que $t = u(a)$.
Mais il existe $z \in S$ et $b \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ tels que $a = z + b$, donc $t = u(a) = u(z)$.
Finalement, pour tout $x \in E$,

$$x = y + u(z), \quad (y, z) \in S^2.$$

Unicité : Si $x = y' + u(z')$ avec $(y', z') \in S^2$, alors $y - y' = u(z' - z) \in \operatorname{Im} u \cap S = \{0\}$. Il en résulte que $y - y' = 0$ et $z' - z \in \operatorname{Ker} u$. Il s'ensuit que $z' - z \in S \cap \operatorname{Ker} u = S \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$. On a ainsi $y' = y$ et $z' = z$.

b. — Montrons la linéarité de v. Soient x et x' dans E qui s'écrivent $x = y + u(z)$ et $x' = y' + u(z')$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$x + \lambda x' = y + u(z) + \lambda y' + \lambda u(z') = \underbrace{(y + \lambda y')}_{\in S} + u\left(\underbrace{z + \lambda z'}_{\in S}\right).$$

D'autre part, $z = v(x), z' = v(x')$ et $z + \lambda z' = v(x + \lambda x')$, par conséquent, l'unicité de la décomposition entraîne que $v(x) + \lambda v(x') = v(x + \lambda x')$ et v est linéaire.

— Soit $x = y + u(z)$. On sait que $z = v(x)$ et $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$ donc $u^2 = 0$. Par conséquent :

$$(u \circ v + v \circ u)(x) = u(z) + v \circ u(x) = u(z) + v \circ u(y).$$

Comme $y \in S$ et sachant que $u(y) = 0 + u(y)$, on a par définition de v et w que $y = v(u(y))$ et $0 = w(u(y))$, on en déduit que :

$$u(z) + v \circ u(y) = u(z) + y = x.$$

On a ainsi :

$$u \circ v + v \circ u = \operatorname{Id}_E.$$

c. — Pour la linéarité de w, on reprend les calculs vus dans b.

$$x + \lambda x' = \underbrace{(y + \lambda y')}_{\in S} + u\left(\underbrace{z + \lambda z'}_{\in S}\right),$$

or $y + \lambda y' = w(x) + \lambda w(x')$ et $(y + \lambda y') = w(x + \lambda x')$ et l'unicité de la décomposition nous donne la linéarité de w.

— Réduisons $u \circ w$.
Par définition de v et w, on a :

$$\operatorname{Id}_E = w + u \circ v,$$

donc $u = u \circ w + u^2 \circ v = u \circ w$ car on a vu que $u^2 = 0$.
Réduisons $w \circ u$.
On a aussi $0 = u^2 = u \circ w \circ u$. Ainsi, $\operatorname{Im}(w \circ u) \subset \operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im}(w \circ u) \subset \operatorname{Im} w \subset$. Par suite $\operatorname{Im}(w \circ u) \subset \operatorname{Im} u \cap S = \{0\}$. Il s'ensuit que $w \circ u = 0$.
On en conclut que :

$$u \circ w + w \circ u = u.$$

d. On sait que $u^2 = 0$, donc on a déjà $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $x = u \circ v(x) + \circ v \circ u(x) = u \circ v(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} u$. On a ainsi :

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u.$$

e. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $(e_1, \ldots, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit un endomorphisme en posant $u(e_1) = u(e_2) = 0$ et $u(e_3) = e_1$. On a bien $u^2 = 0$ et $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}e_1$ strictement contenu dans le sous-espace engendré par e_1 et e_2. En définissant w par $w(e_1) = w(e_2) = 0$ et $w(e_3) = e_3$, on vérifie que $u \circ w + w \circ u = u$.

Corrigé de l'exercice 5.8 :

a. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Comme pour tout $i \in [\![1, n[\![$, on a $F_i \subset H_i$, on a $(x_1, \ldots, x_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$ et comme la somme des H_i est directe, il en découle que, pour tout $i \in [\![1, n[\![$, $x_i = 0$.

b. Montrons, pour tout $i \in [\![1, n[\![$, que $H_i \subset F_i$. Soit $y_i \in H_i$. On a $y_i \in H_1 \oplus \cdots \oplus H_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$. Par suite, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $y_i = x_1 + \cdots + x_n$. On obtient alors, en posant $z_k = y_k$ si $k \neq i$ et $z_i = x_i - y_i$:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

Comme la somme des F_i est directe, on a $z_k = y_k = 0$ si $k \neq i$ et $z_i = x_i - y_i = 0$ donc $y_i = x_i \in F_i$. Ce qui montre que $H_i \subset F_i$ pour tout i.

Corrigé de l'exercice 5.9 :

a. On sait que $f \circ g = g \circ f$.
   - Montrons que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. On a $f(x) = 0$, donc $g(f(x)) = 0$; or $f \circ g(x) = g \circ f(x) = 0$, donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.
   - Montrons que $\operatorname{Im} f$ est stable par g. Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors $g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x)$ par conséquent $g(y) \in \operatorname{Im} f$.
   - Il est clair que le noyau et l'image de g sont stables par f.

b. On suppose que $F = \operatorname{Im} g$ et $G = \operatorname{Ker} g$ sont stables par f.
   - Soit $x \in G$. On a $f \circ g(x) = f(g(x)) = 0$ car $g(x) = 0$, puis $g \circ f(x) = g(f(x)) = 0$ car $f(x) \in G$ puisque G est stable par f. On a :

$$f \circ g_{|G} = g \circ f_{|G}.$$

— Soit $x \in F$. On a $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x)$ car $F = \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(g - \operatorname{Id}_E)$ et $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)$ car F étant stable par f,$f(x) \in F$. On a :

$$f \circ g_{|F} = g \circ f_{|F}.$$

Comme $E = F \oplus G$, on a $f \circ g = g \circ f$.

Corrigé de l'exercice 5.10 :

— Supposons que $\begin{cases} f \circ g = f \\ g \circ f = g \end{cases}$.
On a $f \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ g = f$, et on montre de même pour g. Donc f et g sont des projections.
Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker} g$. On obtient de même $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$ d'où $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.
— Réciproquement, notons $F = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.
Si $x \in F$, on a $f \circ g(x) = g \circ f(x) = 0$.
Si $x \in \operatorname{Im} f$, on a $g \circ f(x) = g(x)$ car f est un projecteur donc $f(x) = x$ pour $x \in \operatorname{Im} f$; on a aussi $f \circ g(x) = f(x)$ pour la même raison.
Sachant que $E = F \oplus \operatorname{Im} f$, on a les égalités du système.

Corrigé de l'exercice 5.11 :

— Soit $x \neq 0$, alors il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
— Soit (x, y) une famille liée de vecteurs non nuls. On a $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$. On a alors $f(y) = \lambda_y y$ et aussi $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$. Par suite :

$$(\lambda_x - \lambda_y)\, y = 0.$$

Comme $y \neq 0$, on en déduit que $\lambda_x = \lambda_y$.
— Soit (x, y) une famille libre. On a alors $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ et $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Par conséquent :

$$(\lambda_x - \lambda_{x+y})\, x + (\lambda_y - \lambda_{x+y})\, y = 0.$$

Comme la famille (x, y) est libre, on a $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$.
— Finalement, pour tout $x \neq 0$, $x \mapsto \lambda_x$ est une application constante que nous notons λ. On a donc, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$, relation vraie aussi pour $x = 0$. f est une homothétie ou l'application nulle.

Corrigé de l'exercice 5.12 :

— On a toujours $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
— Soit $x \in \operatorname{Im} f$, comme $f^2 = f$, f est une projection par suite $f(x) = x$. Comme $g \circ f = 0$, on a $g \circ f(x) = 0$. Par conséquent $x = (f + g)(x) \in \operatorname{Im}(f + g)$ et $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f + g)$.
— Soit $y \in \operatorname{Im} g$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On sait que $f(x - f(x)) = 0$ et $g(x - f(x)) = g(x)$, par conséquent $g(x) = f(x - f(x)) + g(x - f(x))$ et $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
— Comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f+g)$ et $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, il en découle que $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(f + g)$ et l'égalité en découle avec le premier point.

Pierre Burg

Algèbre et géométrie

CAPES et Agrégation

L'ouvrage présente tout le nouveau programme d'algèbre et de géométrie au CAPES externe et à l'Agrégation interne de mathématiques avec un cours complet et plus de 200 démonstrations, exemples et exercices corrigés.
Il permet aux candidats de maîtriser le programme d'algèbre et de géométrie commun aux deux concours et de s'entraîner aux épreuves.

Sommaire

Agrégé de mathématiques, professeur hors classe, **Pierre Burg** a été membre du jury du CAPES et du CAPESA durant de nombreuses années. Colleur en classes préparatoires MP et MP*, il intervient également au CNED dans la préparation du CAPES de mathématiques.

ISBN 978-2-311-00500-4

9 782311 005004

www.VUIBERT.FR