VUIBERT PRÉPAS

V. Queffelec

MATHS

PC/PC* • PSI/PSI* • PT/PT*

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

Tout-en-un

- Tout le cours
- Fiches de synthèse
- Conseils méthodologiques
- Vrai/faux
- Exercices d'application
- Sujets de concours
- Tous les corrigés détaillés

Vuibert

Avant-propos

Cet ouvrage vous propose, en un seul volume, toutes les clés nécessaires pour réussir votre année de mathématiques en PC/PC*, PSI/PSI* et PT/PT*.

Cours complet

Rigoureusement conforme aux nouveaux programmes, il contient tous les outils pour acquérir les connaissances et les savoir-faire indispensables.

Fiches de synthèse et de méthodes

Pour une révision efficace avant les kholles ou les épreuves, l'essentiel du cours est présenté de manière synthétique sous forme de fiches de révision et complété par de nombreux conseils méthodologiques pour acquérir les bons réflexes.

Vrai/faux

Première étape vers l'entraînement, des vrais/faux vous permettent de tester rapidement la compréhension du cours.

Exercices d'application

Application directe du cours, ces nombreux exercices sont assortis d'un corrigé détaillé. Chacun à un niveau de difficulté clairement identifié : ●○○, ●●○ ou ●●●.

Sujets de concours

Pour se mettre en situation d'épreuves, une sélection d'exercices extraits de sujets de concours vous est proposée. Tous ces exercices sont intégralement corrigés.

Table des matières

Préface

Depuis leur création à la fin du XIXe siècle (par Henri Vuibert, alors plus jeune agrégé de mathématiques de France) les Éditions Vuibert proposent des manuels scientifiques rédigés par les meilleurs auteurs, tous professeurs passionnés par leur discipline et leur enseignement.

Ce fut donc avec un très grand plaisir que je fus contacté pour diriger une nouvelle collection d'ouvrages scientifiques destinés aux étudiants préparationnaires, en adéquation avec les nouveaux programmes de la rentrée 2013.

Nous avons réuni pour cette tâche difficile des auteurs de grand talent, aussi bien pour leur qualification disciplinaire que pour leur désir de communiquer leur savoir à un public de plus en plus hétérogène.

Entre 1980 et 2010, le nombre d'étudiants de CPGE scientifique a plus que doublé, de nouvelles sections ont vu le jour, des classes ont ouvert dans un grand nombre de villes ; pendant cette période, la formation initiale scientifique des élèves à la sortie de l'enseignement secondaire a beaucoup évolué, en même temps que s'érodait le nombre d'heures alloué aux disciplines scientifiques.

L'écart s'est donc creusé entre la terminale et les classes préparatoires aux grandes écoles. Il revient alors aux manuels, comme aux professeurs, de faire preuve de qualités pédagogiques exceptionnelles, sans jamais sacrifier la rigueur indispensable qui est une des forces de l'enseignement supérieur « à la française ». C'est dans ce but que les livres de la collection Vuibert Prépas ont été pensés et rédigés. Ils sont destinés au plus grand nombre et visent à amener ce plus grand nombre au niveau de l'excellence.

Le rôle d'un manuel de classe préparatoire n'est pas évident. Les étudiants disposent déjà de leurs notes de cours, et parfois de polycopiés, provenant d'enseignants fort compétents. Mais chacun sait qu'on observe mieux une statue et qu'on en apprécie mieux la beauté en la regardant sous différents angles ; il en est de même des disciplines scientifiques dans lesquelles une diversité d'approches ne peut que faciliter la compréhension et l'assimilation de notions a priori abstraites et difficiles. En ce sens, les ouvrages de la collection « Vuibert Prépas » constituent une aide conséquente pour les élèves de CPGE scientifiques.

À lire ces ouvrages, que ce soit dans les disciplines qui sont les miennes, Mathématiques et Informatique ou dans des disciplines qui me sont moins familières comme la Physique, la Chimie ou les Sciences de l'Ingénieur, je ne peux être qu'admiratif devant le talent des auteurs de toutes origines qui, dans des délais très courts, ont eu à cœur de faire passer leur amour pour la science et pour son enseignement.

Je suis certain que le public préparationnaire partagera mon enthousiasme pour cette collection qui marque le retour des éditions Vuibert au service de ces filières.

Denis Monasse

Chapitre 7

Séries numériques

Dans ce chapitre, les suites considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Séries absolument convergentes

Cette partie a déjà été traitée en MPSI et PCSI. Elle est au programme des étudiants de PT et peut constituer un rappel pour les étudiants de PC et PSI.

Définition 7.1. Convergence absolue

On dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 7.1.

Une série $\sum u_n$ à valeurs complexes converge absolument *si et seulement si* les deux séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent absolument.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par l'inégalité triangulaire :

$$\max(|\mathrm{Re}(u_n)|, |\mathrm{Im}(u_n)|) \leq |u_n| \leq |\mathrm{Re}(u_n)| + |\mathrm{Im}(u_n)|$$

D'où le résultat par comparaison de séries à termes positifs.

Théorème 7.2. Condition suffisante de convergence

Toute série absolument convergente est convergente.
Autrement dit, pour les séries, la convergence absolue implique la convergence.

Démonstration

D'après la proposition précédente, on peut, sans perte de généralité, démontrer le résultat pour une série $\sum u_n$ absolument convergente à termes réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \qquad u_n^- = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n \leq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors les relations $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$. De plus, les termes u_n^+ et u_n^- sont positifs. Comme on a, en particulier, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$, et que la série de terme général $|u_n|$ est convergente par hypothèse, alors, par comparaison, les séries de termes généraux u_n^+ et u_n^- sont convergentes. Par opérations usuelles sur les suites (ou séries) convergentes, la série de terme général $u_n = u_n^+ - u_n^-$ est convergente.

Conseils méthodologiques

Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ à termes quelconques converge, on peut vérifier, dans l'ordre :

- Si son terme général (u_n) tend vers 0.
- Si son terme général (u_n) est de signe constant. Dans ce cas, on lui applique les théorèmes de comparaison (sauf si (u_n) est négative), de domination ou d'équivalence.
- Si la série converge absolument, dans le cas où son terme général (u_n) n'est pas de signe constants. Pour cela, on applique les théorèmes précédents à la série $\sum |u_n|$ (à termes positifs).
- Sinon, c'est plus délicat. On est souvent amené à employer des techniques plus fines.

Exemple 7.1

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ converge absolument, donc converge.

En effet, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\displaystyle\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Or, d'après l'exemple de Riemann, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. D'où, par définition, la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$.

Proposition 7.3.

Si (u_n) est une suite à valeurs complexes et (v_n) une suite à termes positifs, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Démonstration

C'est une conséquence du théorème de domination, en notant que $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow |u_n| = O(v_n)$.

Exemple 7.2

La série $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}$ converge absolument, donc converge. En effet, on a $\frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, car la suite de terme général $\frac{\frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}}{\frac{1}{n^{3/2}}}$ est bornée par 2.

- D'après l'exemple de Riemann, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.
- Par *comparaison* (ou domination), la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin n}{n^{3/2}+\cos n}$ converge absolument.

Corollaire 7.4.

Si (u_n) est une suite à valeurs complexes et (v_n) une suite à termes positifs, si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Démonstration

C'est une conséquence du fait que $u_n = o(v_n)$ implique que $u_n = O(v_n)$.

Proposition 7.5. Inégalité triangulaire

Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration

Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $M \in \mathbb{N}$ tels que $M \geq N$. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente, c'est-à-dire que $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge. D'après le théorème 7.2, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. La convergence de deux séries précédentes implique la convergence des séries $\sum_{n\geq N} |u_n|$ et $\sum_{n\geq N} u_n$. De plus, on peut écrire l'inégalité triangulaire pour les sommes *finies* $\left|\sum_{n=N}^{M} u_n\right| \leq \sum_{n=N}^{M} |u_n|$. En faisant tendre M vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient le résultat.

2. Développement décimal d'un réel

Cette partie a déjà été traitée en MPSI et PCSI. Elle est au programme des étudiants de PT et peut constituer un rappel pour les étudiants de PC et PSI.

Proposition 7.6. Développement décimal

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe une unique suite d'entiers naturels (x_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k} \leq x < \sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k} + 10^{-n}$$

De plus, la suite (x_n) est à valeurs dans $[\![0,9]\!]$ pour $n \geq 1$ et ne stationne pas sur 9.

Vocabulaire 7.3

- La suite (x_n) est appelée développement décimal propre de x.
- Les valeurs $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k 10^{-k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k 10^{-k} + 10^{-n}$ sont les approximations décimales à l'ordre n de x par défaut et par excès.

Proposition 7.7.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, de développement décimal (x_n). Alors, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{10^n}$ converge vers x. On note sa limite $x = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots$, qu'on appelle écriture décimale illimitée de x.

Remarque 7.4

Pour obtenir le développement décimal de $x \in \mathbb{R}_-$, on se ramène au développement décimal de $-x$.

Remarque 7.5

Il existe des développements décimaux impropres : ceux où l'on n'impose pas la condition de non-stationnarité sur 9. Dans ces conditions, il y a ambiguïté sur la description d'un nombre par son développement décimal. Par exemple, on a :

$$1 = 1,00000\ldots = 0,99999\ldots$$

Définition 7.2.

Les nombres décimaux sont les réels dont la suite des décimales stationne sur 0.

Proposition 7.8.

Les nombres rationnels sont les nombres dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

3. Complément sur les séries à valeurs réelles

3.1. Règle de d'Alembert

Lemme 7.9.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ une série de terme général strictement positif.

- S'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, alors $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge.
- S'il existe $k \in]1,+\infty[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$, alors $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

Démonstration

Supposons qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$. Par produit – dit télescopique – d'inégalités entre nombres positifs, on peut écrire pour $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 + 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=0}^{n-1} k = k^n$$

Donc, $u_n = O(k^n)$. Or, on sait que la série géométrique de terme général k^n converge, car $k < 1$. Par comparaison, la série de terme général u_n converge.

De manière analogue, s'il existe $k > 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$, on montre que $k^n = O(u_n)$. Par comparaison avec une série géométrique divergente, la série de terme général u_n diverge ((u_n) ne tend pas vers 0).

Théorème 7.10. Règle de d'Alembert

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série de terme général *strictement positif*.

On suppose, de plus, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

- Si $l < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $l > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration

- Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$. Par définition de la limite d'une suite, en prenant $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |\frac{u_{n+1}}{u_n} - l| \leq \varepsilon$. En particulier, $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \frac{1-l}{2} = \frac{1+l}{2} < 1$. D'après le lemme précédent, $\sum_{n\geq n_{n_0}} u_n$ converge, donc $\sum u_n$ converge également.

- On montre de même que, si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple 7.6

Pour illustrer le cas où $l = 1$ dans la règle de d'Alembert, on peut considérer les exemples (séries de Riemann) suivants :

- Pour $u_n = 1/(n+1)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
- Pour $u_n = 1/(n+1)^2$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Conseils méthodologiques

La règle de d'Alembert est particulièrement adaptée aux cas où le terme général u_n est formé de produits, quotients, puissances ou factorielles.

Exemple 7.7

Considérons la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n}$. Pour $n \geq 1$, on a $u_n = \frac{n^2}{2^n} > 0$. De plus :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Remarque 7.8

La règle de d'Alembert s'adapte à la notion de convergence absolue. Si (u_n) est une suite *ne s'annulant pas à partir d'un certain rang*, telle que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to l < 1$ alors, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc converge. De même, si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to l > 1$, alors $(|u_n|)$ ne tend pas vers 0 et (u_n) non plus.

3.2. Comparaison entre série et intégrale

Théorème 7.11. Théorème de comparaison entre une série et une intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et *décroissante*. Alors :

- La série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ converge.
- La série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge *si et seulement si* f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

...

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

Démonstration

- Soit f vérifiant les hypothèses de l'énoncé. En utilisant le fait que $[n-1,n]$ est de longueur 1, on a, pour $n \geq 1$:

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - \int_{n-1}^{n} f(n)\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))\mathrm{d}t$$

Puisque f est décroissante, $\forall t \in [n-1,n]$, $f(t) - f(n) \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, $w_n \geq 0$; la série $\sum w_n$ est à termes positifs. La décroissance de f implique aussi $\forall t \in [n-1,n]$, $f(n-1) \geq f(t)$, d'où :

$$0 \leq w_n \leq \int_{n-1}^{n} (f(n-1) - f(n))\mathrm{d}t = f(n-1) - f(n)$$

Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, on peut écrire, par télescopage :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} w_n \leq \sum_{n=1}^{N} (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N)$$

Or, f est décroissante et minorée (car positive) ; elle est donc bornée par $f(0)$. On en déduit que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^\star}$ est bornée. Comme son terme général w_n est positif, la série $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ est convergente.

- Il suffit d'écrire, pour $N \geq 1$:

$$\int_0^N f(t)dt = \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} \left(w_n + \int_{n-1}^{n} f(n)\mathrm{d}t \right) = S_N + \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

Comme la suite (S_N) est convergente, les suites suivantes sont de même nature :

$$\left(\int_0^N f(t)dt \right)_{N\in\mathbb{N}^\star} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n=1}^{N} f(n) \right)_{N\in\mathbb{N}^\star}$$

Pour terminer, comme f est positive, elle est intégrable *si et seulement si* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}^+}} \int_0^x f(t)dt$ existe. C'est équivalent à l'existence de la limite suivante $\lim\limits_{\substack{N\to+\infty \\ N\in\mathbb{N}}} \int_0^N f(t)dt$, car on dispose de l'encadrement suivant :

$$\int_0^{\lfloor x\rfloor} f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{\lfloor x\rfloor+1} f(t)dt$$

Interprétation graphique

La preuve de ce théorème est basée sur la technique d'encadrement dite « des rectangles », qu'illustre la figure suivante.

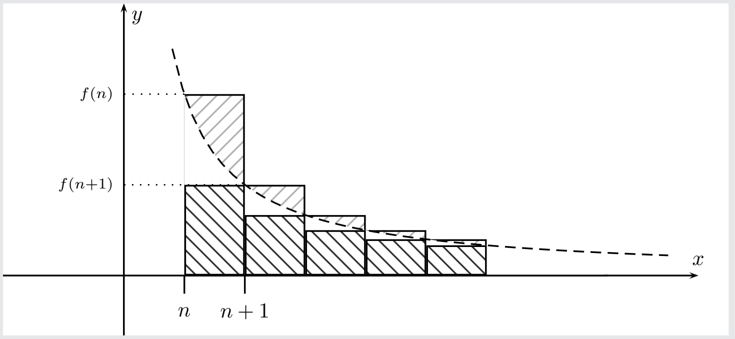

Figure 7.1. L'aire sous la courbe entre n et $n+1$ est comprise entre les aires des rectangles du premier plan et de l'arrière-plan.

Une simple lecture graphique donne :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(n) \text{ et } \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 7.9

On peut faire des calculs analogues pour une fonction f croissante.

Proposition 7.12. Estimations du reste ou de la somme partielle

(Hors programme)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue et décroissante. On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On note S_n (resp. R_n) la somme partielle (resp. le reste) d'ordre n de la série de terme général $f(n)$

- Si $I \in \mathbb{R}$, alors $I - \int_0^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq R_n \leq I - \int_0^{n} f(t)\mathrm{d}t$.
- Si $I = +\infty$, alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration

- Supposons que $I < +\infty$ (*i.e.* $I \in \mathbb{R}$). Alors, la série $\sum f(n)$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, on obtient, par la méthode des rectangles :

$$\int_{n+1}^{n+1+p} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} f(k) \leq \int_n^{n+p} f(t)\mathrm{d}t$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, ce qui est licite, et d'après la relation de Chasles :

$$L-\int_0^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{\infty} f(k) = R_n \leq L-\int_0^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

- Supposons que $L=+\infty$. Alors, d'après le théorème 7.11, il existe $a\in\mathbb{R}_+$ tel que $S_n - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t = a+o(1)$. Par conséquent :

$$\frac{S_n}{\int_0^n f(t)\mathrm{d}t} = 1+\frac{a+o(1)}{\int_0^n f(t)\mathrm{d}t} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Exemple 7.10 (de Bertrand)

Pour a et b réels, on considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^a \ln^b n}$$

Montrons que la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge si et seulement si $(a>1)$ ou $(a=1$ et $b>1)$.

Commençons par remarquer que $\forall n\geq 2,\ u_n\geq 0$. On pourra donc utiliser tous les théorèmes de comparaison appliquables aux séries à termes positifs.

1. Supposons que $a>1$. Alors, on a $c=\frac{1+a}{2}>1$. De plus :

$$\frac{\frac{1}{n^a \ln^b n}}{\frac{1}{n^c}} = \frac{n^{(1+a)/2}}{n^a \ln^b n} = \frac{1}{n^{(a-1)/2}\ln^b n}$$

   Or, $\frac{a-1}{2}>0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^c}} = 0$, quel que soit $b\in\mathbb{R}$, par croissances comparées. On en déduit que $u_n = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$, avec $c>1$. Par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge.

2. Supposons $a<1$. Alors, on a $c=\frac{1+a}{2}<1$. De plus :

$$\frac{\frac{1}{n^c}}{\frac{1}{n^a \ln^b n}} = \frac{n^a \ln^b n}{n^{(1+a)/2}} = \frac{\ln^b n}{n^{(1-a)/2}}$$

   Or, $\frac{1-a}{2}>0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^c}}{u_n} = 0$, quel que soit $b\in\mathbb{R}$, par croissances comparées. On en déduit que $\frac{1}{n^c} = o(u_n)$, avec $c<1$. Par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ diverge.

3. On suppose maintenant que $a=1$. Si $b\leq 0$, on a $\frac{1}{n} = O(u_n)$, par croissances comparées. Par comparaison avec une série de Riemann (la série harmonique), la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ diverge.
   Dorénavant, on suppose $b>0$.
   On définit sur $I=]1,+\infty[$ la fonction f par $f(t)=\frac{1}{t\ln^b t}$. Cette fonction est, d'après les

théorèmes usuels, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et on a :

$$\forall t \geq 2, \quad f'(t) = -\frac{\ln^b t + b\ln^{b-1} t}{t^2(\ln^b t)^2} \leq 0$$

Donc la fonction f est décroissante sur $[2,+\infty[$. On en déduit que, pour $n \geq 2$, et $\forall t \in [n, n+1]$, on a $0 \leq f(t) \leq f(n)$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} f(n)\mathrm{d}t = f(n) = u_n \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

En sommant pour n allant de 3 à $N \geq 3$ et d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{n=3}^{N}\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_3^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=3}^{N} u_n \leq \sum_{n=2}^{N}\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = \int_2^{N} f(t)\mathrm{d}t \qquad (7.1)$$

Étudions l'intégrale de droite : dès qu'elle admet une limite finie quand $N \to +\infty$, alors la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge, car ses sommes partielles sont majorées par cette limite. Par le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ $u = \ln t$, on a, si $b \neq 1$:

$$\int_2^N f(t)\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln N} \frac{\mathrm{d}u}{u^b} = \frac{1}{1-b}[u^{1-b}]_{\ln 2}^{\ln N} = \ln^{1-b}(N) - \ln^{1-b}(2)$$

Cette expression admet une limite finie quand $N \to +\infty$ si et seulement si $b > 1$ (on a déjà exclu le cas $b = 1$).
Supposons maintenant $b = 1$. Le changement de variable précédent donne :

$$\int_3^{N+1} f(t)\mathrm{d}t = [\ln u]_{\ln 3}^{\ln(N+1)} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 3)$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$. Comme la série est à termes positifs, pour montrer qu'elle diverge, il suffit de montrer, d'après l'inégalité de gauche de la relation (7.1), que la limite précédente vaut $+\infty$.
En conclusion, dans le cas où $a = 1$, la série converge si et seulement si $b > 1$.

3.3. Formule de Stirling

Lemme 7.13. Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$. On a alors :

- $I_{n+1} \leq I_n$
- $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$
- $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$
- $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}$

Synthèse et méthodes

Séries numériques

Produit de Cauchy

- Le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum w_n$ l'est aussi et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite numérique. On suppose qu'il existe un rang à partir duquel (u_n) ne s'annule pas et que, de plus :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

- Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $l = 1$, on ne peut conclure directement.

Comparaison série/intégrale

- Si f est une fonction positive continue et décroissante sur $[0, +\infty[$, alors $\forall n \geq 1$,

$$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

- La série $\sum f(n)$ converge *si et seulement si* f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Les deux encadrés suivants ne figurent pas au programme des étudiants de PT.

Séries alternées

Une série $\sum u_n$ est dite alternée si la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.

- **Théorème spécial :**
  Si $\sum u_n$ est alternée et que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0 en décroissant, alors $\sum u_n$ converge.

...

- **Majoration du reste :**
  Si $\sum u_n$ est alternée relevant du théorème spécial, alors $\forall n \in \mathbb{N}$:
  - $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1}.
  - $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Les faits suivants sont nouveaux pour les étudiants de PT et peuvent constituer un rappel pour les étudiants de PC et PSI.

Convergence absolue

- Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente.
- Si $\sum u_n$ converge absolument :
  - La série $\sum u_n$ converge.
  - On a l'inégalité triangulaire suivante : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n|$.
- Si v_n est le terme général positif d'une série convergente et si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Rappel : exemples de référence

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 1$.
- Pour $q \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} q^n$ converge *si et seulement si* $|q| < 1$.

Preuves de convergence

Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ converge, on peut :

- Montrer que $u_n = O(v_n)$, où v_n est le terme général d'une série à termes positifs convergente.
- Appliquer la règle de d'Alembert à $\sum |u_n|$.
- Remarquer qu'il s'agit d'un produit de Cauchy de séries absolument convergentes.
- La comparer à une intégrale.
- Montrer qu'elle relève du théorème spécial des séries alternées.
- Effectuer un développement asymptotique de son terme général, en examinant la convergence des séries dont les termes généraux sont les éléments de ce développement.

Exercices

Séries numériques

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
a)	Si $\sum \lvert u_n \rvert$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge.	☐	☐
b)	Une série à termes positifs converge *si et seulement si* elle converge absolument.	☐	☐
c)	La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos n}{n^2+1}$ converge absolument, donc converge.	☐	☐
d)	Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, on peut dire, par comparaison entre série et intégrale, que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ converge.	☐	☐
e)	On a $n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n} 2\pi n$.	☐	☐
f)	La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 0$.	☐	☐
g)	D'après le théorème spécial, si $\sum u_n$ est une série alternée telle que u_n tend vers 0, alors elle converge.	☐	☐
h)	Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge.	☐	☐
i)	Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l < 1$, alors, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.	☐	☐

Exercices

●○○ **Exercice 1** (45 min.)

Soit $a \in \mathbb{R}^\star$. Déterminer dans chacun des cas suivants, la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
2. $u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$
3. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
4. $u_n = \frac{3.6.9...(3n)}{n^n}$
5. $u_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}}$
6. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
7. $u_n = 2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+2)$
8. $u_n = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$
9. $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

●○○ **Exercice 2** (20 min.)

On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Dans chacun des cas suivants, calculer la somme S de la série de terme général u_n :

$$1.\ u_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} \quad 2.\ u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad 3.\ u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$$

●○○ **Exercice 3** (15 min.)

En écrivant son terme général comme une intégrale, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

●●○ **Exercice 4** (20 min.)

Déterminer (sans la calculer) une approximation à 10^{-3} près des sommes suivantes :

$$S^1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \ \text{ et } \ S^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

●●○ **Exercice 5** (15 min.)

Déterminer la nature de la série de terme général u_n défini par $u_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$$

●●● **Exercice 6 Comparaison logarithmique** (20 min.)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes strictement positifs et $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

1) Montrer que :
   - Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
   - Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

2) En déduire une nouvelle démonstration de la règle de d'Alembert.

Sujets de concours

●●○ **Sujet A Oral Mines-Ponts PC** (10 min.)

Nature de $\sum u_n$ où :

$$u_n = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

●○○ **Sujet B Oral Mines-Ponts PC et PSI** (10 min.)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^\star$. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a + (-1)^n\sqrt{n}}{a + (-1)^n\sqrt{n} + n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

●○○ **Sujet C Oral Mines-Ponts PC** (10 min.)

Nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+n^{1/3}}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

●●● **Sujet D Oral Centrale PC** (15 min.)

Si $n \in \mathbb{N}^\star$, soit $s(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture en base 10 de n. Convergence et valeur de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)}$$

●●● **Sujet E Oral X-ESPCI PC** (20 min.)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que la suite de terme général $u_n = H_n - \ln n$ converge. On note γ sa limite.
2) Si $(p,n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, montrer que $\gamma \leq H_n + H_p - H_{np} \leq 1$.

●○○ **Sujet F Oral X-ESPCI et TPE PC** (15 min.)

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

●●○ **Sujet G Oral Mines-Ponts PSI** (20 min.)

1) Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.
2) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$.
3) On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, quand n tend vers $+\infty$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$.

●●○ **Sujet H Oral CCP PSI** (15 min.)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1) Justifier l'existence de R_n. Quelle est la limite de la suite (R_n) ?
2) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)! R_n = 1$.
3) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(2\pi e(n!))$.

●○○ Sujet I Oral CCP PC (20 min.)

On définit une suite (a_n) par $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\,dt$.

1) Calculer a_0 et a_1.
2) a) Montrer que (a_n) est décroissante.
   b) Montrer que $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$.
   c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a $a_n \sim a_{n+1}$.
3) a) Montrer que la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constante.
   b) En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$ et la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$.

●●○ Sujet J Oral Centrale et CCP PC (25 min.)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $U_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha+k)}$.

1) a) Montrer que $(U_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente vers $l(\alpha)$.
   b) Montrer que $\sum_{n\geq 0} U_n(\alpha) - U_{n-1}(\alpha)$ converge.
   c) En supposant $l(\alpha) \neq 0$, montrer que $U_n(\alpha) - U_{n-1}(\alpha) \sim -\frac{\alpha.l(\alpha)}{n}$. En déduire $l(\alpha) = 0$.
2) On suppose dans cette question que $\alpha \in [0,1]$. Montrer que $U_n(\alpha) \geq \frac{1}{n+\alpha}$. Conclure sur la nature de $\sum_{n\geq 0} U_n(\alpha)$.
3) Soit $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n \,\mathrm{d}t$.
   a) Montrer que l'intégrale converge, et calculer $I_0(\alpha)$ et $I_1(\alpha)$.
   b) Trouver une relation entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha)$.
   c) En déduire que $U_n(\alpha) = I_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

●●○ Sujet K Oral X-ESPCI PC (20 min.)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

●●○ Sujet L Oral Centrale PC et PSI (15 min.)

Soit (u_n) une suite à valeurs positives. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \text{ et } w_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$$

1. Les séries de termes généraux u_n et v_n sont-elles de même nature ?
2. Les séries de termes généraux u_n et w_n sont-elles de même nature ?

●●○ Sujet M Oral Mines-Ponts et CCP PC (20 min.)

Soit $a \in \mathbb{R}^\star$ et $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. On suppose que $a > 1$ et on pose $b = \frac{1+a}{2}$ et $v_n = n^{-b}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall n \geq N,\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
2. On suppose que $a < 1$ et on pose $b = \frac{1+a}{2}$ et $v_n = n^{-b}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall n \geq N,\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
3. Montrer que, dans le cas où $a = 1$, on ne peut conclure.
4. Nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{n^n}{n!e^n} \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+3}$$

●●● **Sujet N Oral ICNA PSI** (20 min.)

Soit (u_n) une suite décroissante qui converge vers 0.
Comparer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n(u_n - u_{n+1})$.

Corrigés

Séries numériques

Corrigés des Vrai/Faux

a) Faux. Considérer, par exemple, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
b) Vrai.
c) Vrai.
d) Faux. Il est vrai que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Mais la comparaison entre série et intégrale ne s'applique pas ici, car la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas positive (ni même de signe constant).
e) Faux. La formule de Stirling donne $n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
f) Vrai. Si $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement. Sinon, elle relève du théorème spécial.
g) Faux. Il manque l'hypothèse de décroissance de la suite $(|u_n|)$.
h) Faux. Considérer, par exemple, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
i) Faux. La règle de d'Alembert ne s'applique qu'aux séries à termes de signe constant.

Corrigés des exercices

Exercice 1

1. La suite (u_n) est à termes strictement positifs et on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (\frac{n}{n+1})^n \to \frac{1}{e} < 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série converge.

2. En effectuant un développement asymptotique, on obtient $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + O(\frac{1}{n^{3/2}})\right) - 1 = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + v_n$, avec $v_n = O(\frac{1}{n^{3/2}})$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ relève du critère spécial, donc converge. La série $\sum \frac{1}{8n}$ est une série de Riemann divergente. La série $\sum v_n$ converge absolument. Par somme, la série $\sum u_n$ diverge.

3. On a $u_n = e - \exp(n\ln(1+\frac{1}{n}) = e - \exp(1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$. u_n est donc la somme du terme général d'une série divergente et du terme général d'une série absolument convergente. La série est donc divergente.

4. La suite (u_n) est à termes strictement positifs et on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3(\frac{n}{n+1})^n \to \frac{3}{e} > 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série diverge.

5. Si $|a| < 1$, $|u_n| \sim |a|^n$ et la série (géométrique) converge absolument, donc converge. Si $|a| > 1$, $|u_n| \sim |a|^{-n}$, et la série (géométrique) converge absolument, donc converge. Si $a = \pm 1$, la série diverge grossièrement.

6. On a $u_n = \exp(-(\ln n).\ln(\ln n)) = n^{-\ln(\ln n)}$. Comme $\ln(\ln n) \to +\infty$, il existe un rang n_0 à partir

duquel $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, $\ln(\ln n) \geq 2$ et donc $0 \leq u_n \leq n^{-2}$. Par comparaison, la série converge.

7. Par un développement asymptotique, $u_n = 6\ln n + \ln(1+\frac{1}{n^3}) - 6\ln n + \ln(1+\frac{2}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$. Par comparaison, la série converge.

8. On a $u_n = \sin\left(\frac{\pi((n+1)^2-2(n+1)+1)}{n+1}\right) = \sin\left(\pi(n+1) - 2\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$. La série est donc alternée relevant du théorème spécial et converge donc.

9. La suite (u_n) est à termes strictement positifs par croissance de l'intégrale. Toujours par croissance de l'intégrale, on a $u_n \geq \int_0^1 \frac{t^n}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}$. Par minoration par une série divergente, la série diverge.

Exercice 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on obtient par une décomposition en éléments simples que $u_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2}$. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, notons S_N la somme partielle d'ordre N de la série. On a, par changement d'indice et télescopage :

$$S_N = 2\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{N+1} - 2 + 2\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^2} - 1 - \frac{1}{(N+1)^2}$$

Par passage à la limite sur N, la somme cherchée est $S = \frac{\pi^2}{3} - 3$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on obtient, par une décomposition en éléments simples, que $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{(n+1)} + \frac{1}{n+2}\right)$. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, notons S_N la somme partielle d'ordre N de la série. On a, par changement d'indice et télescopage :

$$2S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - 2\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}$$

Par passage à la limite sur N, la somme cherchée est $S = \frac{1}{2}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln n - \ln(n+3)$. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, notons S_N la somme partielle d'ordre N de la série. On a, par changement d'indice et télescopage :

$$u_n = \sum_{n=2}^{N+1}\ln n + \sum_{n=3}^{N+2}\ln n - \sum_{n=1}^{N}\ln n - \sum_{n=4}^{N+3}\ln n = \ln 3 + \ln\left(\frac{N+1}{N+3}\right)$$

Par passage à la limite sur N, la somme cherchée est $S = \ln 3$.

Exercice 3

La série converge comme série alternée relevant du théorème spécial. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on peut écrire $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = (-1)^{n-1}\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t$. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, la somme partielle S_N d'ordre N de la série est, par linéarité de l'intégrale :

$$S_n = \sum_{n=1}^{N}\int_0^1 (-t)^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{N}(-t)^{n-1}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^N}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^N\int_0^1 \frac{t^N}{1+t}\mathrm{d}t$$

CORRIGÉS

car on reconnaît une somme de série géométrique. D'une part, $\left|\int_0^1 \frac{t^N}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^N \mathrm{d}t = \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'autre part, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \ln 2$$

Exercice 4

On notera, dans chacun des cas, S_N (resp. R_N) la somme partielle (resp. le reste) d'ordre N de la série.

1. La première série converge, car elle est alternée relevant du théorème spécial. On cherche N tel que $|S^1 - S_N| = |R_N| \leq 10^{-3}$. Il suffit pour cela d'obtenir N tel que $\frac{1}{(N+1)^2} = |u_{N+1}| \leq 10^{-3}$, en vertu du fait que l'on dispose, pour les séries alternées relevant du théorème spécial, de la majoration $|R_N[\leq |u_{N+1}|$. On peut, par exemple, prendre $N = 31$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{31} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est alors une approximation convenable. Numériquement, $S^1 = -\pi^2/12 \approx -0,8225$ et $S_{31} \approx -0,8230$.

2. Pour évaluer l'approximation de S^2, on va comparer la série associée avec une intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $f(n) \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$. En sommant cette relation pour n variant de $p \in \mathbb{N}^\star$ à $q \in \mathbb{N}^\star$ ($q \geq p$), on obtient l'encadrement :

$$0 \leq \sum_{n=p}^{q} f(n) \leq \int_p^q f(t)\mathrm{d}t \leq \int_p^q \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

Comme la série converge, on peut faire tendre q vers $+\infty$ pour obtenir $0 \leq R_p \leq \frac{1}{p}$. Ainsi, $S_{1000} = \displaystyle\sum_{n=0}^{1000} \frac{1}{n^2+1}$ est une approximation de S^2 à 10^{-3} près.

Exercice 5

Si $u_0 = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on montre par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = 0$. La série est alors nulle et converge. Supposons maintenant que $u_0 \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On a alors $0 < 1 - \cos(u_0) = u_1 \leq 2$, puis $0 < 1 - \cos u_1 = u_2 \leq 1 - \cos(2) < \frac{\pi}{2}$. On montre alors par une récurrence immédiate que $\forall n \geq 2,\ 0 < u_n < \frac{\pi}{2}$. La fonction $f : x \mapsto x - 1 + \cos x$ est croissante et positive sur $[0, \pi]$. On en déduit que $\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = 1 - \cos(u_n) \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 2 et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Par continuité de la fonction cosinus, on a $l = 1 - \cos l$ dont l'unique solution sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est 0 (car f est strictement croissante et ne s'annule donc qu'en 0). De l'inégalité $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\ \sin x \leq x$, on déduit que $u_{n+1} = 2\sin^2 \frac{u_n}{2} \leq \frac{u_n^2}{2}$. Par récurrence, on montre alors que $\forall n \geq 2,\ u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{u_2}{2}\right)^{2^{n-2}}$. Comme $0 \leq \frac{u_2}{2} < 1$, $u_n = O(\left(\frac{u_2}{2}\right)^{2^{n-2}})$ et la série converge.

Exercice 6

1) Par produit télescopique $\forall n > n_0$:

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} = \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_n}{v_{n_0}}$$

On a donc $u_n = O(v_n)$. On en déduit le résultat, par comparaison (d'après le théorème de domination pour les séries).

2) Soit (u_n) une série à termes strictement positifs telle que $\lim u_n = l \in \overline{\mathbb{R}_+}$. On traite seulement les cas où l est fini. Le cas $l = +\infty$ s'y ramène.

- Si $l < 1$, en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$, on obtient qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2}$. En notant $v_n = \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'une part, $\sum v_n$ converge et, d'autre part, $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. On en déduit – par comparaison logarithmique – que $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$, en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$, on obtient qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{1+l}{2}$. En notant $v_n = \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'une part, $\sum v_n$ diverge et, d'autre part, $\forall n \geq n_0$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$. On en déduit – par comparaison logarithmique – que $\sum u_n$ converge.

Corrigés des sujets de concours

Sujet A

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ ($n \geq 2$), la fonction $x \mapsto \text{Arccos}(1/\sqrt{x})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, n+1]$, donc continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. Sa dérivée étant donnée par :

$$x \mapsto \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \frac{-1}{\sqrt{1-1/\sqrt{x}^2}} = \frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [n, n+1]$ tel que :

$$\begin{aligned}\left|\text{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \text{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{n+1}})\right| &= \frac{\sqrt{c}}{2c\sqrt{c}\sqrt{c-1}}(n+1-n) \\ &\leq \frac{\sqrt{n+1}}{2n\sqrt{n}\sqrt{n-1}} = O(n^{-3/2})\end{aligned}$$

Par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Un télescopage permet également de conclure.

Sujet B

En effectuant un développement asymptotique, on obtient :

$$u_n = \left(\frac{a}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{a}{n}} = \frac{a-1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}}) = \frac{a-1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + v_n$$

CORRIGÉS

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ relève du théorème spécial, donc converge. La série de terme général v_n converge absolument par comparaison à une série de Riemann. Comme la série harmonique diverge, la série $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $a = 1$.

Sujet C

Pour conclure, il suffit d'obtenir un développement asymptotique du terme général, par composition. On a :

$$\sqrt{n^2+n+n^{1/3}} = n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{5/3}}\right)^{1/2} = n\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^{5/3}}-\frac{1}{8n^2}+O(\frac{1}{n^{8/3}})\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
u_n &= \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n^{2/3}}-\frac{\pi}{8n}+O(\frac{1}{n^{5/3}})\right)\\
&= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2n^{2/3}}-\frac{\pi}{8n}+O(\frac{1}{n^{5/3}})\right) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2n^{2/3}}+(-1)^n\frac{\pi}{8n}+O(\frac{1}{n^{5/3}})\\
&= (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2n^{2/3}}+(-1)^n\frac{\pi}{8n}+v_n
\end{aligned}$$

Les séries de termes généraux $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2n^{2/3}}$ et $(-1)^n\frac{\pi}{8n}$ sont alternées relevant du théorème spécial, donc convergent. La série de terme général v_n converge par comparaison avec une série de Riemann. Par somme, la série de terme général u_n converge.

Sujet D

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $s(n) \leq \lfloor\frac{\ln n}{\ln 10}\rfloor + 1$. On a donc $0 \leq u_n = O(\frac{\ln n}{n(n+1)})$. Comme $\ln n = O(n^{1/2})$, on a $u_n = O(\frac{1}{n^{3/2}})$. La série de terme général u_n converge donc par comparaison avec une série de Riemann. Pour calculer la somme S de cette série, commençons par constater que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$s(n+1) = \begin{cases} s(n)+1 \text{ si } n = 10^p-1, \text{ avec } p \in \mathbb{N}^\star \\ s(n) \quad \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc, en employant un télescopage et en faisant la somme des termes d'une suite géométrique, pour $q \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{10^{q+1}-2}\frac{s(n)}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{10^{q+1}-2}\left(\frac{s(n)}{n}-\frac{s(n)}{n+1}\right) = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq 10^p-1}}^{10^{q+1}-2}\left(\frac{s(n)}{n}-\frac{s(n+1)}{n+1}\right) + \sum_{\substack{p=1\\ n=10^p-1}}^{q}\left(\frac{s(n)}{n}-\frac{s(n+1)-1}{n+1}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{10^q-2}\left(\frac{s(n)}{n}-\frac{s(n+1)}{n+1}\right)+\sum_{p=1}^{q}\frac{1}{10^p}\\
&= \frac{s(1)}{1}-\frac{s(10^q-1)}{10^q-1}+\frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{q+1}}{1-\frac{1}{10}}\right)\\
&= 1-\frac{q}{10^q-1}+\frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{q+1}\right)
\end{aligned}$$

Comme la série est convergente, on sait que la limite, lorsque q tend vers $+\infty$, de la quantité précédente existe et vaut S. On en déduit que $S = 1+\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$.

Sujet E

Rappelons qu'on dispose de l'inégalité de concavité suivante : $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$. On peut la démontrer en étudiant la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1}) \leq 0$ d'après l'inégalité précédente. La suite (u_n) est donc décroissante.

Par comparaison entre série et intégrale pour la fonction $f : t \mapsto 1/t$ continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, on obtient :

$$\ln(n+1) - \ln 2 + 1 = \int_2^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n f(t)\mathrm{d}t = \ln n + 1$$

On en déduit que $1 - \ln 2 \leq 1 + \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln 2 \leq u_n \leq 1$. La suite (u_n) est donc minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite γ appartenant à l'intervalle $[1 - \ln 2, 1]$, donc positive.

2) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$. Par la même méthode, on obtient :

$$H_{np} - H_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k} \leq \int_n^{np} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln p$$

On en déduit que $H_p + H_n - H_{np} \geq H_p - \ln p = u_p \geq \gamma$, car la suite (u_n) est décroissante, donc minorée par sa limite γ. D'autre part, en majorant les n termes de chacune des sommes sur l'indice i par une même valeur (indépendante de i) :

$$H_{np} - H_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=jn+1}^{(j+1)n} \underbrace{\frac{1}{i}}_{\geq \frac{1}{(j+1)n}} \geq \sum_{j=1}^{p-1} \frac{n}{(j+1)n} = H_p - 1$$

D'où la seconde inégalité : $H_n + H_p - H_{np} \leq 1$.

Sujet F

On va employer le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, vu dans le sujet 5 et compenser les termes de dénominateurs impairs par des termes de dénominateurs pairs. Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+4}\right)}_{=H_{4N+4}} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} + \underbrace{\frac{1}{4n+2}}_{=\frac{1}{2}\frac{1}{2n+1}} - \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\frac{1}{4n+4}}_{=\frac{1}{2}\frac{1}{2n+2}} \\
&= H_{4N+4} - \frac{3}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}}_{=H_{2N+2}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}}_{=H_{N+1}} \\
&= \ln(4N+4) + \gamma - \frac{3}{2}\ln(2N+2) - \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2}\ln(N+1) + \frac{1}{2}\gamma + o(1) \\
&= \ln 4 - \frac{3}{2}\ln 2 + \ln\left(\frac{(N+1)^{3/2}}{(N+1)^{3/2}}\right) + o(1)
\end{aligned}$$

On en déduit que la somme recherchée est la limite, lorsque N tend vers $+\infty$, de la quantité ci-dessus, qui vaut $\frac{\ln 2}{2}$.

Sujet G

1) Il suffit de lire la question qui suit pour savoir ce qu'on attend ! Prouvons donc que $u_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$. Soit $f : t \mapsto \frac{f(t)}{t}$, définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, dont la dérivée est donnée par $f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$. La fonction f' est négative sur $[e, +\infty[$. On en déduit que f est décroissante (et positive) sur $[3, +\infty[$. Par comparaison avec une intégrale, $\forall n \geq 4$, on a :

$$\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

En sommant pour n variant de 4 à $N \geq 4$, on obtient que :

$$\int_4^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leq u_N - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} \leq \int_3^{N} f(t)\mathrm{d}t$$

Intégrons f par parties :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \Big[(\ln t)^2\Big]_a^b - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On a donc :

$$\frac{1}{2}(\ln N)^2 \sim \frac{1}{2}(\ln(N+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln 4)^2 \leq u_N - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} \leq \frac{1}{2}(\ln N)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \sim \frac{1}{2}(\ln N)^2$$

D'où le résultat, par le théorème d'encadrement.

2) D'après le théorème de comparaison entre série et intégrale, la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ (où $n \geq 4$) est convergente. Or, la somme partielle d'ordre $N \geq 4$ de cette série s'écrit :

$$S_N = \int_3^N f(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=4}^{N} f(n) = \frac{1}{2}(\ln N)^2 - u_n + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

On en déduit, par somme, que la suite $(\frac{1}{2}(\ln n)^2 - u_n)$ converge vers une limite notée $-C$), donc que $\frac{1}{2}(\ln n)^2 - u_n = -C + o(1)$.

3) En examinant les termes d'indices pairs et impairs, et en exploitant le fait que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = 2\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

C'est le résultat attendu, que nous conserverons sous cette forme. En employant les développements asymptotiques admis et obtenus précédemment, et en écrivant que $(\ln(2n))^2 = (\ln n)^2 + 2(\ln 2)(\ln n) + (\ln 2)^2$, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = (\ln 2)(\ln n + \gamma) + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C - \frac{1}{2}(\ln(2n))^2 - C + o(1) = \gamma(\ln 2) - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1)$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \gamma(\ln 2) - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

Sujet H

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \frac{1}{n!} \neq 0$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \to 0$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge. D'où l'existence de son reste d'ordre n R_n. En tant que suite de restes de série convergente, la suite (R_n) converge vers 0. Au passage, remarquons que la somme de la série $\sum u_n$ vaut e.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, en utilisant la somme d'une série géométrique :

$$1 \leq (n+1)!R_n = 1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

On en déduit, par encadrement, que $(n+1)!R_n \to 1$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\frac{n!}{k!}$ est un entier naturel. Par somme, $n!S_n$ est un entier naturel. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(n!2\pi e) = \sin(2\pi n!(S_n + R_n)) = \sin(2\pi n!R_n) = \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}((n+1)!R_n)\right)$$

Comme $(n+1)!R_n \to 1$, on a $\frac{2\pi}{n+1}((n+1)!R_n) \to 0$. Par conséquent, $\sin(n!2\pi e) \sim \frac{2\pi}{n+1}$, qui est le terme général d'une série divergente. Par équivalence, la série de terme général $\sin(n!2\pi e)$ diverge.

Sujet I

1) Par le changement de variable $t = \sin u$, on obtient :

$$a_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2u) du = \frac{\pi}{4}$$

On a aussi :

$$a_1 = -\frac{1}{3}\left[(1-t^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

2) a) Pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $t^{n+1}\sqrt{1-t^2} \leq t^n\sqrt{1-t^2}$. Par croissance de l'intégrale, on a donc $a_{n+1} \leq a_n$. Donc (a_n) est décroissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties et linéarité de l'intégrale :

$$a_{n+2} = \left[t^{n+1}\left(-\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3}\right)\right]_0^1 + \frac{n+1}{3}\int_0^1 t^n \underbrace{(1-t^2)^{3/2}}_{=(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{n+1}{3}a_{n+2} + \frac{n+1}{3}a_n$$

D'où $(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n$.

c) Comme (a_n) est croissante, on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+4}a_n = a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$. On conclut en divisant par a_n non nul et en invoquant le théorème d'encadrement.

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, on a $a_{n-1} = \frac{n+3}{n}a_{n+1}$, d'où $u_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1} = (n+3)(n+1)(n+2)a_n a_{n+1} = u_{n+1}$. On montre alors par une récurrence immédiate que (u_n) est constante.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1} = 6a_0 a_1 = \frac{\pi}{2}$. Comme (a_n) est positive et $a_n \sim a_{n-1}$, on en déduit que $a_n^2 \sim \frac{\pi}{12n(n+1)(n+2)}$, puis $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{12n^3}}$. Par théorème d'équivalence, la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge (car $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge).

CORRIGÉS

VUIBERT PRÉPAS

MATHS

PC/PC* • PSI/PSI* • PT/PT*

VUIBERT PRÉPAS, des ouvrages pour faire la différence :

- Des cours complets pour acquérir les connaissances indispensables
- Des fiches de synthèse et de méthodes pour réviser l'essentiel et acquérir les bons réflexes
- De nombreux exercices intégralement corrigés pour s'entraîner : Vrai/faux et exercices d'application
- Des sujets de concours corrigés pour se mettre en situation d'épreuve

SOMMAIRE

Les auteurs :

Vincent Queffelec *est professeur en classe préparatoire scientifique au lycée Sainte-Anne à Brest. Il est auteur des chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie.*

Hélène Cerf-Danon *et* ***Véronique Lods*** *sont professeures en classe préparatoires au lycée Louis-le-Grand à Paris. Elles sont auteurs des chapitres de probabilité.*

ISBN : 978-2-311-40027-4

9 782311 400274

www.Vuibert.fr