VUIBERT PRÉPAS

K. Commault • É. Mercier • S. Passerat • E. Tournesac

MATHS

TSI 1re année

CONFORME AU PROGRAMME

Tout-en-un

- Tout le cours
- Fiches de synthèse
- Conseils méthodologiques
- Vrai/faux
- Exercices guidés
- Exercices d'approfondissement
- Tous les corrigés détaillés

Vuibert

Avant-propos

Cet ouvrage vous propose, en un seul volume, toutes les clés nécessaires pour réussir votre année de Mathématiques en première année de TSI :

Cours complet

Rigoureusement conforme aux nouveaux programmes, il contient tous les outils pour acquérir les connaissances et les savoir-faire indispensables.

Fiches de synthèse

Pour une révision efficace avant les khôlles ou les épreuves, l'essentiel du cours est présenté de manière synthétique sous forme de fiches de révision.

Vrai/faux

Première étape vers l'entraînement, des vrais/faux sont proposés pour permettre de tester rapidement la compréhension du cours.

Exercices guidés

Ces exercices, de difficulté croissante, fournissent de nombreux conseils visant à vous aider à démarrer dans la résolution de l'exercice. Ils sont assortis d'un corrigé détaillé.

Exercices d'approfondissement corrigés.

Pour se mettre en situation d'épreuves, de nombreux exercices vous sont proposés. Chacun à un niveau de difficulté clairement identifié : •, • • ou •••.

Tous ces exercices sont intégralement corrigés.

Table des matières

Chapitre 1

Pratique calculatoire

Objectif

L'objectif de ce chapitre est de renforcer les techniques de calcul sur des outils indispensables en mathématiques ainsi que dans les autres disciplines scientifiques. Les définitions précises et rigoureuses sont différées aux autres chapitres.

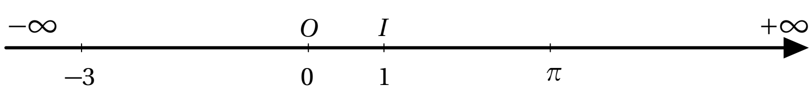
1. Nombres et fonctions

1.1. Droite réelle

Définition 1.1.

- On appelle **droite réelle** toute droite munie de deux points distincts :
  - O est appelé « origine » et est associée au nombre 0 ;
  - I est associé au nombre 1.
- Les **nombres réels** sont les abscisses des points de cette droite.
- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
- Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels compris entre deux **bornes**.
- Un intervalle est dit **fermé** s'il contient ses bornes finies, **ouvert** s'il ne les contient pas, **semi-ouvert** sinon.

Exemples



- -3 et π **appartiennent** à l'ensemble des nombres réels. On note : $-3 \in \mathbb{R}$ et $\pi \in \mathbb{R}$.
- $]-3;\pi[$ est l'intervalle ouvert contenant tous les réels x tels que $-3 < x < \pi$. Notez que les crochets sont tournés vers l'extérieur de l'intervalle pour signifier qu'il ne contient pas ses bornes.
- $]-\infty;\pi]$ est l'intervalle fermé contenant tous les réels x tels que $x \leqslant \pi$.

Notation

Quelques sous-ensembles de $\mathbb{R}$ seront fréquemment utilisés et ont des notations propres :

- $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$ désigne l'ensemble des réels positifs (ou nuls) ;
- $\mathbb{R}_- =]-\infty;0]$ désigne l'ensemble des réels négatifs (ou nuls) ;
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ désignent les ensembles des entiers naturels et relatifs respectivement.

Remarques

1. De façon générale, la présence de * signifie qu'on prive l'ensemble de 0. Ainsi, $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des réels non nuls.
2. Pour deux ensembles A et B, l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B est noté $A \setminus B$ (on lit « A privé de B »). On a ainsi : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. Attention à ne pas confondre crochets et accolades. Les crochets servent uniquement pour les intervalles, les accolades sont utilisées pour décrire des ensembles :
   - $\{1;2;3;4;5;6\}$ est l'ensemble des résultats possibles lorsqu'on lance un dé ;
   - $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \underbrace{\ /\ }_{\text{tels que}} x \geq 0\}$.

Vocabulaire

Soit x un nombre réel.

- $-x$ est l'**opposé** de x. Si x correspond au point M sur la droite réelle, $-x$ correspond au point symétrique de M par rapport à O.
- Si x est non nul, $\dfrac{1}{x}$ est l'**inverse** de x.

Attention : $-x$ désigne l'opposé de x et donc $-x$ est peut être positif (si x est négatif).

Notation (x^n **pour** $n \in \mathbb{N}$)

- On pose $x^0 = 1$ et, pour $n > 0$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$.
- Si $x \neq 0$ alors x^{-n} désigne l'inverse de x^n. Par exemple, $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$.
- **Règles de calcul :** soit x et y des réels non nuls, n et m des entiers relatifs. On a :

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad x^n x^m = x^{n+m} \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

1.2. Travailler avec des inégalités

Propriété 1.1.

Soit a et b deux réels, avec $a < b$. Soit λ un réel non nul.

- On peut toujours ajouter ou soustraire λ à l'inégalité $a < b$:

$$a < b \iff a + \lambda < b + \lambda \quad \text{et} \quad a < b \iff a - \lambda < b - \lambda\,;$$

- On peut multiplier ou diviser l'inégalité par λ **selon le signe de** λ :
  – si λ est positif, on ne change pas le sens de l'inégalité :

$$a < b \Longleftrightarrow \lambda \times a < \lambda \times b \quad \text{et} \quad a < b \Longleftrightarrow \frac{a}{\lambda} < \frac{b}{\lambda}.$$

  – si λ est négatif, on change le sens de l'inégalité :

$$a < b \Longleftrightarrow \lambda \times a > \lambda \times b \quad \text{et} \quad a < b \Longleftrightarrow \frac{a}{\lambda} > \frac{b}{\lambda}.$$

Remarques

1. $\Longleftrightarrow$ se lit « est équivalent à » ou « si, et seulement si ».
2. La propriété précédente peut s'écrire avec des inégalités larges.

Exemple

En France, le taux maximal autorisé pour un conducteur est de 0,5 g d'alcool par litre de sang. Sachant que le taux d'élimination varie entre 0,10 et 0,15 g/L par heure, un individu ayant un taux de 1,1g/L peut-il conduire après 8h sans consommer d'alcool ?
Soit T le taux d'élimination de cette personne. On a :

$$0,1 \leqslant T \leqslant 0,15 \Longleftrightarrow 0,8 \leqslant 8T \leqslant 1,2 \Longleftrightarrow -0,8 \geqslant -8T \geqslant -1,2 \Longleftrightarrow 0,3 \geqslant 1,1-8T \geqslant -0,1.$$

Le taux résiduel d'alcool par litre de sang est dans $[-0,1;0,3]$ (et donc dans $[0;0,3]$ car c'est une quantité positive), la personne peut donc conduire.
Notez cependant que pour la plupart des individus, le taux résiduel n'est pas nul...

Conseils méthodologiques (Comment appliquer une fonction à une inégalité)

Tout dépend du sens de variation de la fonction :

- appliquer une fonction croissante conserve le sens de l'inégalité ;
- appliquer une fonction décroissante change le sens de l'inégalité ;
- il n'y a pas de règle pour une fonction qui n'est pas monotone (c'est-à-dire qui alterne croissance et décroissance).

Remarques

1. Soient a et b deux réels avec $a < b$ a-t-on nécessairement $a^2 < b^2$?
   Non, prenez par exemple $-3 < 2$ mais $(-3)^2 > 2^2$.
   Cette erreur classique est due au fait que $x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions exp et ln sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ respectivement, on peut donc les appliquer sans changer le sens d'une inégalité.

Exemple

Pour $x \in [5;10]$, encadrons e^{12-3x}. On a :

$$5 \leqslant x \leqslant 10 \Leftrightarrow 15 \leqslant 3x \leqslant 30 \Leftrightarrow -15 \geqslant -3x \geqslant -30 \Leftrightarrow -2 \geqslant 12-3x \geqslant -18 \Leftrightarrow e^{-2} \geqslant e^{12-3x} \geqslant e^{-18}.$$

Conseils méthodologiques (Prouver qu'une propriété est fausse avec un contre-exemple)

Dans la remarque précédente, pour montrer que l'implication $a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$ est fausse, on a pris des valeurs pour a et b pour lesquelles $a < b$ est vérifié mais $a^2 < b^2$ ne l'est pas. On a exhibé un **contre-exemple**.

Pour prouver qu'une propriété est fausse on exhibera systématiquement un contre-exemple.

Remarque (Attention : un exemple ne permet pas de prouver qu'une propriété est vraie !)

Prenons un exemple non numérique. Soit la proposition P : « Dans la Seconde 1, tous les élèves sont des garçons ». Prendre comme exemple un garçon de la classe ne prouve pas que P est vraie. Par contre, exhiber une fille de la Seconde 1 suffit pour affirmer que P est fausse.

1.3. Valeur absolue

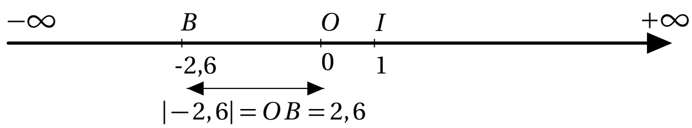
Définition 1.2.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et M le point d'abscisse x sur une droite réelle.

On appelle **valeur absolue** de x la distance OM. On la note $|x|$.

Exemples

1. Il est souvent utile de faire une figure pour illustrer :



2. $|-5| = 5$; $|12| = 12$; $|\pi| = \pi$; $|\pi - 5| = 5 - \pi$.

Remarques

- Puisque la valeur absolue est une distance c'est une quantité positive ou nulle.
- Si $x \in \mathbb{R}_+$ alors $|x| = x$; si $x \in \mathbb{R}_-$ alors $|x| = -x$, ce qui semble paradoxal car l'idée « naturelle » de la valeur absolue est qu'elle élimine les signes $-$.

Propriété 1.2.

Soient a et b deux réels, M et N leurs points correspondants sur la droite réelle.

On dit que la longueur MN est la **distance entre les nombres** a et b et on la note $\text{dist}(a, b)$.

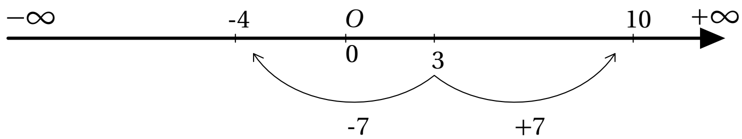
On a : $\text{dist}(a, b) = |b - a|$.

Conseils méthodologiques

Puisqu'une valeur absolue peut être interprétée comme une distance, il est souvent utile de faire une figure pour résoudre les exercices proposés.

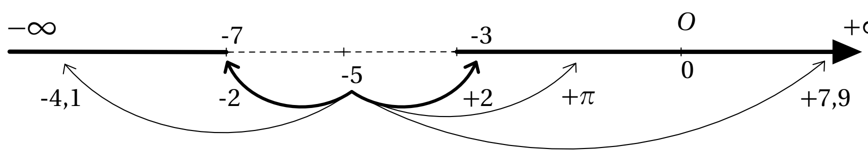
Exemples

1. Résoudre $|x-3| = 7$ revient à trouver tous les réels x dont la distance à 3 est 7 :



   On a donc comme ensemble de solutions : $\{-4; 10\}$.

2. Pour résoudre $|5+x| > 2$, on commence par remarquer que $|5+x| = |x+5| = |x-(-5)|$. On cherche donc tous les réels x dont la distance à -5 est strictement supérieure à 2 :



   Les solutions sont situées à gauche (strictement) de -7 et à droite (strictement) de -3. On a donc comme ensemble de solutions : $]-\infty; -7[\cup]-3; +\infty[$.

Remarque

Étant donnés deux ensembles A et B, $A \cup B$ (lire « A union B ») est l'ensemble qui contient les éléments de A ainsi que les éléments de B : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Propriété 1.3. Inégalité triangulaire

Soient a, b et c des réels. On a : $|b-a| \leq |b-c| + |c-a|$.

Remarque

Si on interprète l'inégalité triangulaire en termes de distance, elle affirme que le plus court chemin entre a et b ne passe pas par c, sauf quand $c \in [a, b]$ (qui est le cas d'égalité).

1.4. Fonctions de référence : affines, polynômiales du second degré, inverse

Résultat 1.4. Fonctions affines

- Ce sont les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$ avec a et b des réels.
- a est le **coefficient directeur** (ou pente), b est l'**ordonnée à l'origine**.
- Leurs courbes représentatives sont des droites.
- Le signe de a détermine les variations :
  - si $a > 0$, la fonction est croissante ;
  - si $a < 0$, la fonction est décroissante ;
  - si $a = 0$, la fonction est constante.
- Si $b = 0$, on dit que la fonction est **linéaire**, c'est un cas particulier de fonctions affines.

...

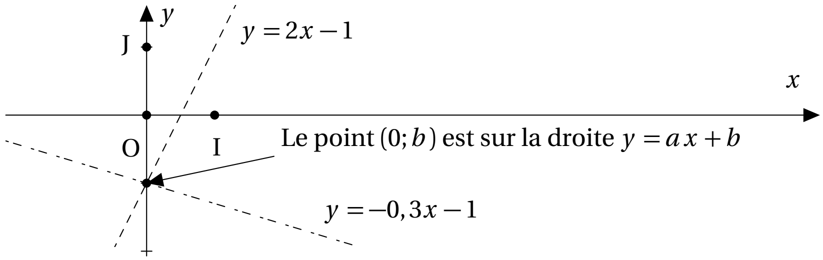


Figure 1.1. Courbes représentatives de fonctions affines.

Résultat 1.5. Fonctions polynomiales du second degré

- Ce sont les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels, $a \neq 0$.
- Leurs courbes sont des **paraboles**.
- Le signe de a détermine l'orientation de la parabole :
  - si $a > 0$, la parabole est orientée vers le haut ;
  - si $a < 0$, la parabole est orientée vers le bas.
- Les solutions éventuelles de $f(x) = 0$ sont appelées les **racines** de f. Pour les trouver on dispose d'un algorithme :
  - étape 1 : calculer $\Delta = b^2 - 4ac$, le **discriminant** de f.
  - étape 2 : trois cas sont possibles selon le signe de Δ :
    * si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de racines réelles ;
    * si $\Delta = 0$, alors il y a une unique racine, $r = \dfrac{-b}{2a}$;
    * si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines distinctes

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

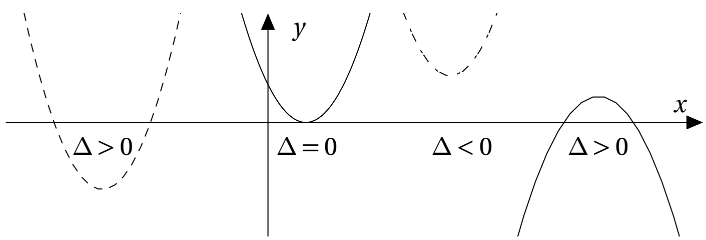


Figure 1.2. Trois paraboles orientées vers le haut, une vers le bas.

Résultat 1.6. Fonction inverse

- Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Sa courbe représentative est une **hyperbole**.
- Elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais pas sur $\mathbb{R}^*$).

...

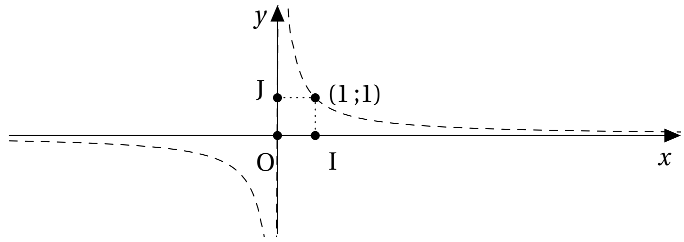


Figure 1.3. L'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.

2. Résoudre des équations

2.1. Généralités

Exemple

Considérons l'équation $(E) : 3x + 2 = x + 4$.
Pour $x = 0$, (E) devient $2 = 4$ qui est une égalité Fausse. Par contre, pour $x = 1$ on obtient $5 = 5$ qui est Vraie, on dit que 1 est une **solution** de (E).
Pour résoudre (E), il faut trouver **toutes** ses solutions.

Propriété 1.7.

Soit (E) une équation. Lorsqu'on fait une opération arithmétique élémentaire (ajouter un réel, soustraire un réel, multiplier par un réel non nul, diviser par un réel non nul) on obtient une nouvelle équation équivalente à (E).

Exemples

1. $3x + 2 = x + 4 \iff 3x + 2 - 2 - x = x + 4 - 2 - x \iff 2x = 2 \iff \frac{2x}{2} = \frac{2}{2} \iff x = 1$.
   On en conclut que 1 est l'unique solution de (E), autrement dit : l'ensemble des solutions de (E) est $\{1\}$.
2. Que penser du raisonnement suivant : $\frac{x+5}{x} = 0 \iff \frac{x+5}{x} \times x = 0 \times x \iff x + 5 = 0$?

   Dans la première équation, il est absurde de considérer $x = 0$: c'est une **valeur interdite**. Par contre, dans la dernière, $x = 0$ est autorisé ; ces deux équations ne sont donc pas *vraiment* équivalentes. Lorsqu'on résout une équation, il faut commencer par déterminer l'ensemble des valeurs autorisées pour la variable. Ensuite, la résolution est effectuée uniquement parmi ces valeurs. Corrigeons le raisonnement en précisant qu'il est valable sur $\mathbb{R}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{x+5}{x} = 0 \iff \frac{x+5}{x} \times x = 0 \times x \iff x + 5 = 0 \iff x = -5.$$

Remarques

1. Le symbole ∀ se lit « pour tout ».
2. Les valeurs interdites proviennent notamment des situations suivantes :
   - on ne peut pas diviser par un nombre nul ;
   - on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre strictement négatif ;
   - on ne peut pas calculer le logarithme népérien d'un nombre négatif ou nul.

Conseils méthodologiques (Résolution graphique d'une équation)

Soit une équation du type $f(x)=g(x)$.
L'observation des courbes représentatives de f et g est un outil intéressant car les abscisses des points d'intersection sont les solutions de $f(x)=g(x)$.

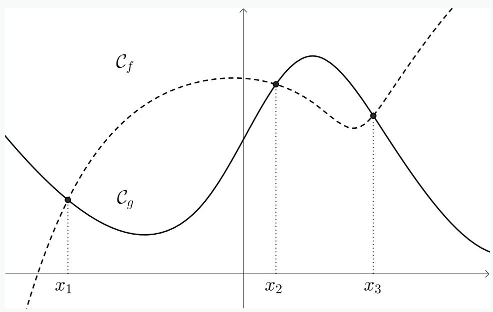


Figure 1.4. Sur cet exemple, trois solutions apparaissent : x_1, x_2 et x_3.

Néanmoins, il faut comprendre les limites d'une résolution graphique.

D'une part on obtient des valeurs approchées des solutions (cela étant, si la lecture semble indiquer que x_1 vaut -3, on peut tester -3 dans l'équation pour voir si c'est une solution).

D'autre part, la lecture est faite sur une partie de la courbe. Il est possible que d'autres points d'intersection (donc d'autres solutions) existent en dehors de la *fenêtre* observée. Reprenons l'exemple précédent :

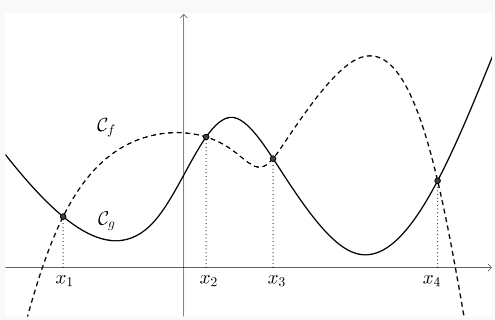


Figure 1.5. Sur une fenêtre plus grande, une nouvelle solution apparaît.

2.2. Équations polynomiales

2.2.1. Généralités

Définition 1.3.

- Un polynôme est une fonction de la forme
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
avec $a_0 \in \mathbb{R}, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}^*$.
- L'entier naturel n est appelé **degré** du polynôme P.
- Pour $i \in \{0; 1; \ldots; n\}$, a_i est appelé **coefficient** de degré i. On dit également que a_n est le **coefficient dominant**.

Exemples

1. $f(x) = 3 - 3x + x^2 - x^4$ est un polynôme de degré 4. Ses coefficients sont :
$$a_0 = 3\ ;\ a_1 = -3\ ;\ a_2 = 1\ ;\ a_3 = 0 \text{ et } a_4 = -1.$$
2. Les fonctions affines (non nulles) sont des polynômes de degrés 1 ou 0.
Par exemple : $g(x) = 3x - 5$ est de degré 1 ; $h(x) = -8$ est de degré 0.

Remarques

1. La définition qui a été donnée exclut le cas particulier du polynôme nul (car on demande qu'au moins un coefficient soit non-nul). Une définition plus complète sera vue lors du chapitre dédié aux polynômes.
2. L'expression $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est ambigüe. En effet, elle sous-entend que n est supérieur ou égal à 3, ce qui n'est pas nécessairement le cas. Une meilleure notation existe :
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$
On lit : « somme des $a_k x^k$ pour k variant de 0 à n ».

Définition 1.4.

- On dit qu'une équation est polynomiale lorsqu'elle se ramène, par opérations, à une équation du type $P(x) = 0$ avec P un polynôme.
- On dit alors que le degré de l'équation est le degré de P.
- Les solutions éventuelles de $P(x) = 0$ sont appelées les **racines** de P.

Exemple

Soit $(E) : x - x^3 = 3x^2 + 1$.
On a $(E) \iff x - x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ donc (E) est polynomiale de degré 3.

2.2.2. Équations de degré 1

Conseils méthodologiques

On cherche à résoudre (E_1) : $ax+b=0$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$.

- Par opérations on a : $(E) \Longleftrightarrow x=\dfrac{-b}{a}$.
- On peut interpréter graphiquement cette résolution : la fonction $f(x)=ax+b$ est de degré 1 ($a\neq 0$). Sa courbe représentative est une droite qui n'est pas horizontale, elle a donc un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Exemple

Résoudre (E) : $\dfrac{\pi x+2}{7}=3x-1$.

On a : $(E) \Longleftrightarrow \pi x+2=7(3x-1) \Longleftrightarrow \pi x-21x=-9 \Longleftrightarrow x=\dfrac{-9}{\pi-21}$.

Remarque

L'ordre dans lequel les opérations sont effectuées est arbitraire et si on en choisit un autre on obtiendra le même résultat. Il est par contre possible que le résultat *semble* différent : il est important de simplifier les expressions, notamment les racines carrées et les fractions.

Conseils méthodologiques (Simplifier une fraction, une racine carrée)

- **Fractions**

  Commençons par une erreur classique : $\dfrac{3+2}{3}=\dfrac{\cancel{3}+2}{\cancel{3}}=2$.

  C'est évidemment faux : $\dfrac{3+2}{3}=\dfrac{5}{3}\neq 2$.

  Simplifier une fraction c'est appliquer la règle :

  $$\frac{A\times B}{A\times C}=\frac{\cancel{A}\times B}{\cancel{A}\times C}=\frac{B}{C}$$

  Il est donc nécessaire de faire apparaître la factorisation par A au numérateur ainsi qu'au dénominateur avant de simplifier.

- **Racines carrées**

  Simplifier une racine carrée c'est appliquer la règle : $\sqrt{A\times B}=\sqrt{A}\times\sqrt{B}$.

  Lorsque A est un carré : $A=C^2$ (avec $C\geqslant 0$), on a alors $\sqrt{A}=\sqrt{C^2}=C$.

  Par exemple, $\sqrt{84}=\sqrt{4\times 21}=\sqrt{4}\times\sqrt{21}=2\sqrt{21}$.

  Si l'on ne connaît pas le signe de C, on a toujours $\sqrt{C^2}=|C|$.

  Par exemple : $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3=|-3|$.

2.2.3. Équations de degré 2

Exemples

1. Résoudre $2x^2 = 3x + 1$.
   On a : $2x^2 = 3x + 1 \Longleftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0$. Posons $a = 2$, $b = -3$ et $c = -1$.
   On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0$ donc l'équation a deux solutions :
   $$x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \text{ et } x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}.$$
2. Résoudre $4x^2 - 3x = 0$.
   On a : $4x^2 - 3x = 0 \Longleftrightarrow x(4x-3) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $4x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3}{4}$.

Remarque

Dans le dernier exemple on a utilisé une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: un produit est nul si, et seulement si, un (au moins) des facteurs est nul. On est ainsi passé d'une équation de degré 2 à deux équations de degré 1.

Conseils méthodologiques (Résoudre une équation de degré 2)

On cherche à résoudre (E_2) : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

- On peut toujours résoudre cette équation en utilisant le discriminant Δ mais parfois on peut factoriser $ax^2 + bx + c$ en un produit de deux polynômes de degré 1 et alors la résolution est immédiate.
- Graphiquement, la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ aura 2, 1 ou aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Remarque (Erreur classique)

Pour résoudre $x^2 = 4$, l'erreur classique est d'écrire : $x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2$.
2 est bien solution de l'équation mais ce n'est pas la seule : -2 est aussi solution.
Une résolution correcte : $x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; -2\}$.

2.2.4. Équations de degré $n \geqslant 3$

Exemples

1. Résoudre $x(x-2) - x^3 + 2x^2 = 0$. On a :
   $$x(x-2) - x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-2) - x^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-x^2) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(1-x) = 0.$$
   Finalement, $x(x-2) - x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 2\}$.
2. Résoudre $x^4 - x^2 - 1 = 0$.
   On pose $X = x^2$ et l'équation devient $X^2 - X - 1 = 0$.
   Cette équation est de degré 2, son discriminant vaut $\Delta = 5 > 0$, elle a donc deux

solutions : $X_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Revenons à l'équation initiale : x en est solution si, et seulement si, $x^2 = X_1$ ou $x^2 = X_2$.

- $X_1 > 0$ donc $X_1 = (\sqrt{X_1})^2$ et alors :
$$x^2 = X_1 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{X_1})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{X_1})(x + \sqrt{X_1}) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\sqrt{X_1}; -\sqrt{X_1}\right\};$$
- $X_2 < 0$ donc l'équation $x^2 = X_2$ n'a pas de solutions réelles.

Finalement l'ensemble des solutions de $x^4 - x^2 - 1 = 0$ est $\left\{\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}; -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}\right\}$.

Conseils méthodologiques (Résoudre une équation de degré $n \geqslant 3$)

Soit P un polynôme de degré > 2. Pour résoudre $P(x) = 0$ il faut parvenir à abaisser le degré. Pour cela on peut :

- essayer de factoriser $P(x)$: si $P(x) = Q(x)R(x)$ alors $P(x) = 0 \Leftrightarrow Q(x) = 0$ ou $R(x) = 0$.
- si toutes les puissances intervenant dans $P(x)$ sont paires, on peut poser $X = x^2$ (on dit que l'équation est **bi-carrée**), résoudre l'équation pour X puis revenir à x.

Si aucune de ces pistes n'aboutit, on ne peut pas résoudre $P(x) = 0$ de façon exacte, mais on peut toujours étudier la fonction P et proposer des valeurs approchées des solutions.

Conseils méthodologiques (Comment factoriser un polynôme ?)

Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 2$. Pour factoriser $P(x)$, il y a trois méthodes possibles :

- il peut y avoir un **facteur commun** (évident ou un peu caché) ;
- on peut parfois utiliser une des **égalités remarquables** :
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad ; \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \quad ; \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
- **si α est une racine de P, alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x - \alpha)$.**

Exemples

1. Facteur commun : $2x - 2 - x^2 + x = 2(x-1) - x(x-1) = (x-1)(2-x)$.
2. Égalité remarquable : $x^4 - 4 = (x^2-2)(x^2+2) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$.
3. Factorisation à l'aide d'une racine. Soit $P(x) = x^3 + x - 2$. On remarque que $P(1) = 0$ donc on peut factoriser $P(x)$ par $x - 1$. Autrement dit, il existe des réels a, b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
Pour trouver les valeurs de a, b et c, on va identifier les coefficients de même degré dans les deux membres de l'équation.
$$\begin{aligned} P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 + x - 2 = ax^3 + x^2(b-a) + x(c-b) - c \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} 1 &=& a \\ 0 &=& b-a \\ 1 &=& c-b \\ -2 &=& -c \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 1 \\ b &=& 1 \\ c &=& 2 \end{array}\right. . \end{aligned}$$
Finalement, on a $P(x) = (x-1)(x^2+x+2)$.

Remarque

Dans l'exemple précédent, comment faire pour trouver que 1 est racine de P ? On teste ! On considère qu'on doit s'apercevoir lorsque P a une racine dans $\{-2;-1:0;1;2\}$; on dit alors que P a une **racine évidente**.

2.3. Équations faisant intervenir des fonctions de référence

2.3.1. Équations faisant intervenir ln et exp

Résultat 1.8.

ln et exp sont deux **fonctions réciproques**, c'est-à-dire que leurs effets se compensent :

- lorsque A et B sont strictement positifs, $A = B \Longleftrightarrow \ln A = \ln B$;
- pour tous réels A et B, $A = B \Longleftrightarrow \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^B$.

Conseils méthodologiques (Résoudre une équation faisant intervenir* ln *ou* exp*)

- On commence par déterminer les valeurs de x autorisées.
- On applique ln pour obtenir $\ln(\mathrm{e}^A) = A$ ou exp pour obtenir $\mathrm{e}^{\ln A} = A$.
- On résout la nouvelle équation ainsi obtenue.
- Parmi les solutions de la nouvelle équation, on ne conserve que celles qui sont dans le domaine autorisé.

Exemples

1. Résoudre $\ln(3x+1) = \ln(x-7)$.
   - $\ln(3x+1)$ existe si, et seulement si, $3x+1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.
   - $\ln(x-7)$ existe si, et seulement si, $x-7 > 0 \Leftrightarrow x \in]7;+\infty[$.

   La résolution de cette équation a donc lieu sur $]7;+\infty[$.
   $\forall x \in]7;+\infty[,\ \ln(3x+1) = \ln(x-7) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln(3x+1)} = \mathrm{e}^{\ln(x-7)} \Leftrightarrow 3x+1 = x-7 \Leftrightarrow x = -4$.
   Or, $-4 \notin]7;+\infty[$ donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\emptyset$.
2. Résoudre $\mathrm{e}^{x^2+2} = 15$.
   Les deux membres de l'équation sont définis sur $\mathbb{R}$ et ils sont strictement positifs donc on peut appliquer ln :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x^2+2} = 15 \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{x^2+2}) = \ln(15) \Leftrightarrow x^2+2 = \ln 15 \Leftrightarrow x^2 = \ln 15 - 2$.
   $\ln 15 - 2 > 0$ donc cette équation du second degré a deux solutions réelles : $\sqrt{\ln 15 - 2}$ et $-\sqrt{\ln 15 - 2}$.

2.3.2. Equations trigonométriques

Définition 1.5. (Rappel : radians)

On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé OIJ. On oriente le plan en décidant que l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est direct.

...

- On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1. Son périmètre vaut 2π.
- Soit M un point du cercle trigonométrique. Toute mesure algébrique (c'est-à-dire positive ou négative) de l'arc $\widehat{IM}$ est une **mesure en radians** de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
- L'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ a donc une infinité de mesures en radians, séparées les unes des autres par des multiples de 2π. Par contre, étant donné un réel x, il existe un unique point M sur le cercle tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = x$.

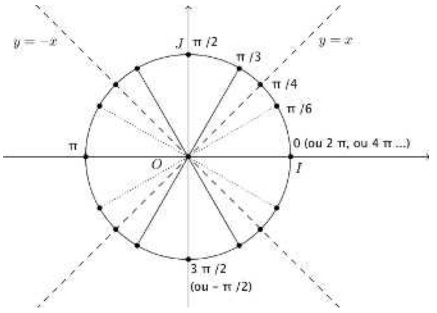


Figure 1.6. Le cercle trigonométrique, quelques mesures en radians à connaître.

Définition 1.6. (Rappel : cosinus et sinus d'un angle)

Soit x un réel, M le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

- On appelle **cosinus** de x l'abscisse de M.
- On appelle **sinus** de x l'ordonnée de M.

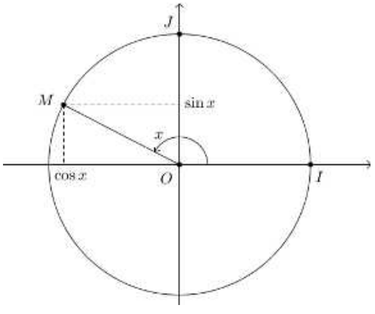


Figure 1.7. Cosinus et sinus d'un réel x.

Remarque

Ces définitions *prolongent* celles vues dans le triangle rectangle, au collège.
Cosinus et sinus étaient alors nécessairement positifs puisque définis comme des rapports de longueurs. À présent, cosinus et sinus prennent leurs valeurs dans $[-1; 1]$, en tant que coordonnées des points du cercle trigonométrique.

Propriété 1.9.

Les valeurs de cos et sin suivantes sont à connaître par cœur :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque

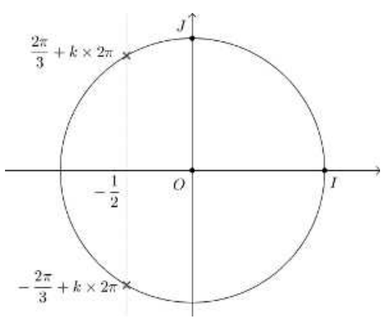
Ces valeurs remarquables sont données pour les angles du quadrant supérieur droit. Par symétries, on passe aux trois autres quadrants.

Conseils méthodologiques (Résolution d'équation trigonométrique)

1. Faire une figure.
2. Visualiser quel(s) point(s) du cercle correspond(ent) au cosinus (ou sinus) donné.
3. Si c'est une valeur remarquable de cosinus ou sinus, on connaît l'angle de façon exacte, sinon non.
4. Ne pas oublier qu'une infinité de mesures existent pour chaque point du cercle.

Exemple

On cherche à résoudre $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$. La figure ci-dessous montre que deux points du cercle trigonométrique correspondent à des angles dont le cosinus vaut $-\frac{1}{2}$:



On a : $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$ ou $3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ces deux nouvelles équations sont résolues par opérations :

$$\begin{aligned}\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow 3x = \tfrac{11\pi}{12} + k \times 2\pi \text{ ou } 3x = -\tfrac{5\pi}{12} + k \times 2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{11\pi}{36} + k \times \tfrac{2\pi}{3} \text{ ou } x = -\tfrac{5\pi}{36} + k \times \tfrac{2\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est : $\left\{\dfrac{11\pi}{36}+k\times\dfrac{2\pi}{3};-\dfrac{5\pi}{36}+k\times\dfrac{2\pi}{3}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Remarque (Petit formulaire de trigonométrie (non-exhaustif))
Soient a et b des réels.

- $\cos^2 a+\sin^2 a=1$.
- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.
  On en déduit d'une part : $\cos(2a)=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$ (avec $b=a$) ;
  et d'autre part : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ (en écrivant $a-b=a+(-b)$).
- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$.
  On en déduit d'une part : $\sin(2a)=2\sin a\cos a$ (avec $b=a$) ;
  et d'autre part : $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ (en écrivant $a-b=a+(-b)$).

3. Résoudre des inéquations

3.1. Généralités

Remarque (Points communs entre résoudre une équation et une inéquation)
Comme pour les équations...

- ... résoudre une inéquation c'est trouver toutes ses solutions, c'est-à-dire toutes les façons de la rendre vraie ;
- ... une lecture graphique permet de conjecturer l'ensemble des solutions d'une inéquation ;
- ... ajouter ou soustraire un réel aux deux membres d'une inéquation aboutit à une inéquation équivalente à la première ;
- ... multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un réel non nul aboutit à une inéquation équivalente à la première **mais selon le signe du réel, on a éventuellement changé le sens de l'inégalité** ;
- ... il faut se méfier lorsque l'on souhaite appliquer une fonction aux deux membres de l'inéquation.

Conseils méthodologiques (Pour résoudre une inéquation de degré 1)
On procède par opérations, en pensant à changer le sens de l'inégalité si l'on multiplie ou qu'on divise par un nombre négatif.

Exemple
Résolvons $(I_1) : 2x+\sqrt{3}<\pi x-4$.

On procède par opérations : $2x+\sqrt{3}<\pi x-4 \Leftrightarrow x(2-\pi)<-4-\sqrt{3}\Leftrightarrow x>\dfrac{-4-\sqrt{3}}{2-\pi}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (I_1) est $\left]\frac{-4-\sqrt{3}}{2-\pi};+\infty\right[$.

Remarque

On peut également interpréter graphiquement la résolution de (I_1).

(I_1) est équivalente à $x(2-\pi)+4+\sqrt{3}<0$, c'est-à-dire qu'on cherche les valeurs de x pour lesquelles $x(2-\pi)+4+\sqrt{3}$ est strictement négatif. La fonction $x \mapsto x(2-\pi)+4+\sqrt{3}$ est une fonction affine décroissante, car son coefficient directeur est négatif. Sa courbe représentative est donc de la forme :

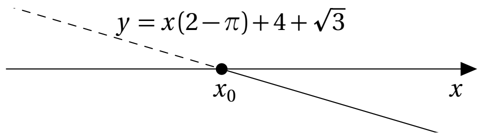


Figure 1.8. En pointillés $y>0$, en trait continu $y<0$; x_0 est la solution de $y=0$. (I_1) a donc pour solution $]x_0;+\infty[$.

Conseils méthodologiques (Résoudre une inéquation de degré 2)

Cela revient a étudier le signe d'un polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$.

- Si P n'a pas de racine réelle son signe est constant : strictement positif ($a>0$) ou strictement négatif ($a<0$).
- Si P a une unique racine réelle x_0, son signe est encore constant (mais $P(x_0)=0$).
- Si P a deux racines réelles distinctes alors son signe varie : il est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.

Remarque

Le signe du coefficient dominant de P donne l'orientation de la parabole correspondante (vers le haut ou le bas). À l'aide de la **Figure 1.2** on retrouve facilement le signe de P.

Exemple

Résoudre $(I_2): x<x^2-3$.

On a $(I_2) \Leftrightarrow 0<x^2-x-3$. On pose $P(x)=x^2-x-3$ et $(I_2) \Leftrightarrow P(x)>0$.

P a pour discriminant $\Delta=13>0$, il admet donc deux racines réelles : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. Finalement, $P(x)$ est strictement positif pour $x \in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$.

Attention : on a bien $x_1<x_2$, sinon l'ensemble donné n'aurait pas été correct.

3.2. Résolution d'inéquations plus difficiles à l'aide d'un tableau de signes

Conseils méthodologiques (Étudier le signe d'un produit (ou quotient) de facteurs dont on sait déterminer les signes)

- On étudie séparément le signe de chaque facteur.
- Dans un tableau, on crée une ligne pour le signe de chaque facteur.

- On détermine le signe du produit (ou quotient) verticalement, du haut vers le bas, en appliquant la règle des signes.
- Si un facteur est nul, alors le produit est nul ou le quotient est non-défini dans le cas où le facteur est au dénominateur.

Exemples

1. Résoudre $x^3+2>x^2$. On a $x^3+2>x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2+2>0$. Posons $P(x)=x^3-x^2+2$. -1 est racine évidente de P donc on peut factoriser $P(x)$ par $(x+1)$, un rapide calcul nous donne $P(x)=(x+1)(x^2-2x+2)$.
   Étudions le signe de chaque facteur :
   - $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$;
   - $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ qui est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

   Construisons le tableau de signe de $P(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x-1)^2+1$			$+$		
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	

   Finalement, l'ensemble des solutions de $P(x)>0$ est $]-1;+\infty[$.

2. Résoudre $\dfrac{5-x}{x^2-3x-1} \leqslant 0$. On remarque que $\dfrac{5-x}{x^2-3x+2}=\dfrac{5-x}{(x-1)(x-2)}$.
   Les facteurs sont tous de degré 1, on peut donc construire le tableau :

x	$-\infty$		1		2		5		$+\infty$
Signe de $5-x$				$+$			0	$-$	
Signe de $(x-1)$		$-$	0			$+$			
Signe de $(x-2)$				$-$	0	$+$			
Signe de $\frac{5-x}{(x-1)(x-2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

   Finalement, $\dfrac{5-x}{x^2-3x-1} \leqslant 0$ a pour solution $]1;2[\cup[5;+\infty[$.

4. Dérivée, primitives d'une fonction

4.1. Calculer une dérivée

Notation

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathscr{D}$. La fonction dérivée de f est notée f', elle est définie sur un domaine $\mathscr{D}' \subset \mathscr{D}$. ($\mathscr{D}'$ peut être n'importe quelle partie de $\mathscr{D}$, y compris $\mathscr{D}$ et $\emptyset$).

Attention : on utilise le « prime » lorsque la fonction a un nom. Si l'on veut dériver une quantité qui n'a pas de nom on utilisera de préférence la **notation différentielle**.

Par exemple, la dérivée de x^3 s'écrira $\dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x}$ plutôt que $(x^3)'$.

Propriété 1.10. Dérivées des fonctions de référence

$f(x) =$	$f'(x) =$	Remarque
k	0	$k \in \mathbb{R}$
x	1	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\sin x$	$\cos x$	

Propriété 1.11. Dérivation et opérations sur les fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur des ensembles $\mathscr{D}_u$ et $\mathscr{D}_v$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La fonction λu est dérivable sur $\mathscr{D}_u$ et on a $(\lambda u)' = \lambda u'$.
- La fonction $u + v$ est dérivable sur $\mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v$ et on a $(u+v)' = u' + v'$.
- La fonction $u \times v$ est dérivable sur $\mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v$ et on a $(u \times v)' = u'v + uv'$.
- La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathscr{D}_u \cap \{x \in \mathscr{D}_v / v(x) \neq 0\}$ et on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Définition 1.7. Une nouvelle opération sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions, définies sur des domaines respectifs $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

- La **fonction composée de** f **par** g est la fonction : $x \mapsto g(f(x))$. On la note $g \circ f$.
- Cette fonction est définie sur $\left\{x \in \mathscr{D} / f(x) \in \mathscr{D}'\right\}$.

Exemples

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{3x+2}$ est la composée $g \circ f$ avec $g = \exp$ et $f(x) = 3x + 2$.
2. Soient les fonctions $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = \ln x$.
   On a : $g \circ f(x) = g(f(x)) = \ln(3x+2)$, mais pour quelles valeurs de x cette quantité est-elle bien définie ? f est définie sur $\mathbb{R}$, g sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g \circ f$ sur $\left\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}_+^*\right\}$.
   Or, $f(x) \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow 3x+2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{2}{3};+\infty[$. Finalement $g \circ f$ est définie sur $]-\frac{2}{3};+\infty[$.

Remarques

- La composée $g \circ f$ correspond à opérer les fonctions l'une après l'autre, f puis g :

$$x \underset{f}{\longmapsto} f(x) \underset{g}{\longmapsto} g\big(f(x)\big);$$

- Contrairement à l'addition et à la multiplication, **la composition des fonctions n'est pas commutative** ; autrement dit, pour deux fonctions f et g, en général $f \circ g \neq g \circ f$. Prendre par exemple $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$. On a $f \circ g(1) = 4$ et $g \circ f(1) = 2$.

Propriété 1.12. Dérivation d'une composée

Soient f et g deux fonctions telles que $g \circ f$ soit définie.
Si f et g sont dérivables alors $g \circ f$ est dérivable et on a : $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.

Exemples

1. Considérons la fonction $u(x) = \cos(x^2 + 3x + 5)$. On a $u = g \circ f$ avec $g = \cos$ et $f(x) = x^2 + 3x + 5$. Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc leur composée $g \circ f$ l'est également. On a $u' = (g \circ f)' = g' \circ f \times f' = -\sin \circ f \times f'$.
   On a donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = -\sin(x^2 + 3x + 5) \times (2x + 3)$.
2. Soit u une fonction dérivable. En appliquant la dérivation des composées, on retrouve des formules vues en Terminale :

$$(u^n)' = n\,u^{n-1} \times u' \quad ; \quad (\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u \quad ; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad ; \quad (\sqrt{u}')= \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Remarque

Pour que $\ln(u)$ et $\sqrt{u}$ soient définies et dérivables, il faut que u prenne ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Conseils méthodologiques (Calculer une dérivée)

Pour calculer la dérivée d'une fonction, on commence par comprendre comment elle est construite, par opérations, à partir des fonctions de référence. Puis, on a deux outils :

- le tableau des dérivées des fonctions de référence ;
- les formules de dérivation pour les opérations sur les fonctions.

Remarque

La dérivée sert notamment pour l'étude des variations, cela sera revu au Chapitre 3.

4.2. Calculer une primitive

Définition 1.8.

Soient f et F deux fonctions définies sur un domaine $\mathscr{D}$.
On dit que F est une primitive de f si F est dérivable et $F' = f$.

Exemple

Soit $f(x) = 3x+5$. La fonction $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5x$ est une primitive de f.
La fonction $F_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5x + 17$ est une autre primitive de f.

Remarque

Soit f n'a aucune primitive, soit f a une infinité de primitives (qui diffèrent les unes des autres par l'addition d'une constante).

Conseils méthodologiques (Déterminer une primitive)

Pour déterminer une primitive d'une fonction f, il faut faire de la rétro-ingénierie de la dérivation. Autrement dit, trouver quelle fonction a été dérivée pour obtenir f.
Si on a un *candidat* pour F, on le dérive et on l'ajuste en le multipliant par une constante.

Exemples

1. Trouver une primitive de $f(x) = \cos x - 3x^5$.
   - $x \mapsto \cos x$ est la dérivée de $x \mapsto \sin x$.
   - $x \mapsto -3x^5$ est un monôme de degré 5. La dérivation fait perdre un degré aux polynômes, prenons comme candidat $x \mapsto x^6$. On a $\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}x} = 6x^5$ on en déduit que $\frac{\mathrm{d}(-\frac{1}{2}x^6)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2} \times 6x^5 = -3x^5$

   Une primitive de $f(x)$ est donc $F(x) = \sin x - \frac{1}{2}x^6$.
2. Trouver une primitive de $f(x) = \mathrm{e}^{4x-2}$.
   On sait que la dérivée de e^x est e^x, prenons comme candidat e^{4x-2}.
   On a $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{4x-2}}{\mathrm{d}x} = 4\mathrm{e}^{4x-2}$ on en déduit que $\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x-2}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4} \times 4\mathrm{e}^{4x-2} = \mathrm{e}^{4x-2} = f(x)$.
   Finalement, une primitive de f est $F(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x-2}$.

Propriété 1.13.

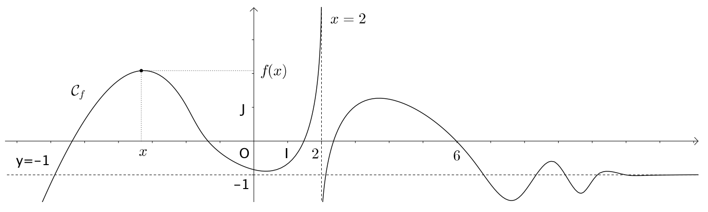
Soit u une fonction dérivable, f une fonction dont on cherche une primitive F.

Si f est de la forme...	Alors $F = \ldots$	Remarques éventuelles
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{u'}{u^n}$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^n}$	$n \in \mathbb{N}$, u ne s'annule pas.
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$ si $u > 0$ $\ln(-u)$ si $u < 0$	u doit être de signe constant
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	

Remarque
Les tableaux de primitives sont une écriture « à l'envers » des tableaux de dérivation, on se limite à rappeler les quelques cas particuliers de composées de la propriété précédente.

5. Déterminer une limite

Remarque (Conjecturer des limites)
Considérons la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ dont la courbe est représentée ci-dessous :



Déterminer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ c'est déterminer quel comportement va avoir $f(x)$ lorsque l'on va rapprocher x de a.
Plusieurs choses sont à noter :

- sur la courbe de f, cela consiste à déplacer le point $(x, f(x))$ vers l'abscisse $x = a$ et observer l'ordonnée $f(x)$.
- a peut être une borne du domaine de définition de f ou une valeur de ce domaine de définition. Sur l'exemple précédent, a peut ainsi valoir $-\infty$, 2, $+\infty$ ou n'importe quel réel (6 par exemple).
- si elle existe, la limite de f en a peut être finie ou infinie.
  Sur la figure, on conjecture : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0$.
- f peut ne pas avoir de limite en a. Par exemple, f n'a pas de limite en 2. En effet, si $x \to 2$, le point mobile est situé très haut (si $x < 2$) ou très bas (si $x > 2$).
  Ici, on peut regarder les limites **à gauche** et **à droite** en 2 et on a : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.
- $\mathscr{C}_f$ devient *infiniment proche* des droites $x = 2$ et $y = -1$. On dit que ces droites sont **asymptotes** à $\mathscr{C}_f$.
- une lecture graphique permet de conjecturer ce qui ne se substitue pas à l'argumentation.

Notation
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ peut également être noté $\lim_a f = b$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$.

Propriété 1.14. Opérations sur les limites

Soient a un réel ou alors $+\infty$ ou $-\infty$, f et g deux fonctions pour lesquelles on puisse étudier la limite en a. Dans la suite, ℓ_1 et ℓ_2 désignent des réels, on note $F.I.$ pour *forme indéterminée.*

- Limite de la somme $f+g$

$\lim_a f$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_a g$	ℓ_2	ℓ_2	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a f+g$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

- Limite du produit $f\times g$

$\lim_a f$	ℓ_1	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a g$	ℓ_2	$\ell_2\neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim_a f\times g$	$\ell_1\times\ell_2$	$\pm\infty$ selon la règle des signes	$F.I.$	$\pm\infty$ selon la règle des signes

- Limite du quotient $\dfrac{f}{g}$

$\lim_a f$	ℓ_1	$\pm\infty$	ℓ_1	$\pm\infty$	$\ell_1\neq 0$	0
$\lim_a g$	$\ell_2\neq 0$	$\ell_2\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+ ou 0^-	0
$\lim_a \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\pm\infty$ selon la règle des signes	0	$F.I.$	$\pm\infty$ selon la règle des signes	$F.I.$

Remarque

L'expression *forme indéterminée* signifie que beaucoup de situations différentes sont possibles et qu'il n'y a pas de règle générale qui s'applique.

Prenons par exemple la forme indéterminée « $\infty-\infty=F.I.$ ». Avec des fonctions f et g qui tendent vers $+\infty$ (par exemple en $+\infty$) on peut avoir :

- $f-g\to 0$: par exemple avec $f(x)=x$ et $g(x)=x$;
- $f-g\to+\infty$: par exemple avec $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$;
- $f-g\to-\infty$: par exemple avec $f(x)=x$ et $g(x)=x^2$;
- $f-g\to 4$: par exemple avec $f(x)=x+4$ et $g(x)=x$;
- $f-g$ qui n'a pas de limite : par exemple avec $f(x)=x+\cos x$ et $g(x)=x$.

Exemples

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)\mathrm{e}^x$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)\mathrm{e}^x=+\infty$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}-7x^2+2x$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}-7x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, on ne peut donc pas conclure par opérations.

On factorise par le terme le plus puissant : $-7x^2+2x = x^2(-7+\frac{2}{x})$.
On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -7+\dfrac{2}{x} = -7$ donc on peut conclure par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty} -7x^2+2x = -\infty$.

Conseils méthodologiques (Pour lever une forme indéterminée)
Souvent, factoriser par le terme le plus puissant permet de lever l'indétermination (si l'expression étudiée est une fraction, on factorise au numérateur et au dénominateur).

Propriété 1.15. Composition des limites

Soit f une fonction, a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ tel que $\lim_a f$ existe, on la note b.
Soit g une fonction telle que $\lim_b g$ existe, on la note c. On a alors $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = c$.

Remarque
Avec les notations précédentes, $b \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$.

Exemple
Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3-5x}$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-5x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Par composition, on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3-5x} = 0$.

Propriété 1.16. Limites remarquables

- Comparaison de exp et ln à un polynôme P (de degré non nul) en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0\,.$$

- Limite d'un taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Remarque (Rappel : la dérivée est la limite d'un taux d'accroissement)
On définit $f('a)$ par $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, c'est-à-dire par la limite (lorsqu'elle existe) du **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$.
Cela permet de lever certaines formes indéterminées, par exemple :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(0+x)-\sin 0}{x} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$$

Conseils méthodologiques (Étudier une limite)

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, a une borne de $\mathscr{D}$ ou un élément de $\mathscr{D}$.
Pour étudier $\lim\limits_{x \to a} f(x)$:

1. On commence par conjecturer la limite cherchée à partir de l'observation de $\mathscr{C}_f$.
2. On essaye d'appliquer les règles d'opérations sur les limites.
3. Si on a une F.I., on essaye de la lever en manipulant l'expression de $f(x)$.
4. Sinon, on essaye d'utiliser les limites remarquables.

6. Raisonner par récurrence

6.1. Illustration sur un exemple

Objectif

Démontrons la propriété $\mathscr{P}$:

$$\text{Pour tout entier naturel } n\text{, on a : } \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarques

1. Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\frac{n(n+1)}{2}$ sont deux nombres ; la propriété à démontrer est l'égalité de ces deux nombres.
2. La propriété $\mathscr{P}$ est elle-même constituée d'une infinité de « sous-propriétés » : l'égalité pour $n = 0$, l'égalité pour $n = 1$, l'égalité pour $n = 2$, etc...
   Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}_n$ la propriété au rang n : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Pour prouver que $\mathscr{P}$ est vraie, il faut prouver que $\mathscr{P}_0$ est vraie, que $\mathscr{P}_1$ l'est également, etc...
3. Si l'on prend par exemple $n = 4$, $\mathscr{P}_4$ est $\sum_{k=0}^{4} k = \frac{4(4+1)}{2}$. On peut calculer les deux membres : $\sum_{k=0}^{4} k = 0+1+2+3+4 = 10$ et $\frac{4(4+1)}{2} = 10$, $\mathscr{P}_4$ est donc Vraie.
   Cela ne permet pas de dire si $\mathscr{P}_n$ sera vraie ou fausse pour $n \neq 4$: on ne peut pas déduire que la propriété est vraie à partir d'un exemple (ou de quelques uns).
   (Par contre, si $\mathscr{P}_4$ avait été fausse, cela aurait fourni un contre-exemple prouvant que $\mathscr{P}$ elle-même aurait été fausse).

Conseils méthodologiques (Principe d'une démonstration par récurrence)

On procède en trois étapes :

- **Initialisation :** on montre que la propriété est vraie pour la plus petite valeur de n.

- **Hérédité :** on montre que la propriété se transmet de proche en proche. Si, pour un certain entier n, $\mathscr{P}_n$ est vraie alors $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est également.

- **Conclusion :** la propriété étant vraie au plus petit rang et héréditaire, elle est également vraie au 2e rang. Puis, encore par hérédité, elle est vraie au 3e rang (elle se transmet du 2e au 3e) et ainsi de suite. Finalement la propriété est vraie pour tout entier n.

Remarque
Dans la preuve de l'hérédité, on travaille sous la supposition que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Cette supposition s'appelle l'**Hypothèse De Récurrence** (HDR), c'est un outil souvent déterminant pour atteindre l'objectif de cette étape : prouver que $\mathscr{P}_{n+1}$ est aussi vraie.

Exemple

- **Initialisation :** montrons que $\mathscr{P}_0$ est vraie, autrement dit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}$.
  On calcule : $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :** supposons qu'il existe un certain entier n tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ : \text{(HDR)}.$$
  Montrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ est également vraie, c'est-à-dire
$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ : \text{(Objectif)}.$$
  On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \underbrace{0+1+\cdots+n}_{\sum_{k=0}^{n} k} + (n+1) = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
  $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie, la propriété est bien héréditaire.

- **Conclusion :** la propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Remarque
On a prouvé la valeur de la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1. Grâce à cette somme, on peut déduire n'importe quelle somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

6.2. Application : formule du binôme

Définition 1.9.

- Soit n un entier naturel non nul.
  On appelle **factorielle de** n le produit $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$. On le note $n!$.
- On convient que $0! = 1$.

Exemples

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, $10! = 3\,628\,800$.

Remarque

Dans la définition, l'utilisation des pointillés est ambiguë. En effet, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ suggère qu'il y a au moins quatre facteurs. Or, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1$, $3! = 3 \times 2 \times 1$. Cette ambiguïté se lève grâce à l'utilisation du symbole $\prod$ qui désigne un produit (comme $\sum$ désigne une somme). On a alors :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Définition 1.10.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et k un entier naturel inférieur à n.

On appelle **coefficient binomial « k parmi n »** le nombre $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

C'est un entier et il est noté $\dbinom{n}{k}$.

Exemples

$\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{2! \times 1!} = 3$, $\binom{5}{2} = \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.

Remarque

Ces coefficients vont servir en dénombrement, on les étudiera plus en avant dans le chapitre dédié. On expliquera notamment pourquoi ce sont des entiers (ce qui n'est pas évident tel qu'on les a défini ici).

Propriété 1.17.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et k un entier naturel inférieur à n. On a $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1} = \dbinom{n+1}{k}$.

Démonstration

On calcule :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right).$$

Calculons la parenthèse : $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n+1-k} = \dfrac{n+1-k+k}{k(n+1-k)} = \dfrac{n+1}{k(n+1-k)}$. On obtient donc :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \times \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Théorème 1.18. Formule du Binôme de Newton

Soit a, b des complexes, n un entier naturel. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration

On procède par récurrence.

- **Initialisation :** montrons que la propriété est vraie pour $n=0$.
On a d'une part $(a+b)^0 = 1$ et d'autre part $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.
Ces deux nombres sont égaux, la propriété est donc bien vérifiée pour $n=0$.

- **Hérédité :** supposons qu'il existe un certain entier n tel que la propriété soit vraie au rang n, c'est-à-dire $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$: (HDR).
Montrons que la propriété est alors également vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire :
$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \text{ : (Objectif).}$$
On a :
$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) = \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \times (a+b) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$
Examinons ces deux sommes :
$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}.$$
On a donc :
$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}. \end{aligned}$$
On utilise la propriété $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ et on remarque que $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ pour écrire :
$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \textstyle\binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion :** la propriété a été initialisée pour $n=0$, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

Synthèse et méthodes

Pratique calculatoire

Travailler avec des réels

- Les **intervalles** sont des parties de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ lui-même est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.
- Les intervalles ne sont pas les seules parties de $\mathbb{R}$. Par exemple $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, c'est l'**union** $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
- Il existe d'autres opérations sur les ensembles :
  - l'**intersection** : par exemple $[1;3[\cap]2;5]=]2;3[$;
  - la **privation** : par exemple $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Fonctions de référence : des outils à bien connaître

- Fonctions affines $f(x)=ax+b$.
- Polynômes du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.
- Fonction inverse $f(x)=\frac{1}{x}$.
- Fonctions trigonométriques cos et sin.

Un bon test pour savoir si vous les connaissez : donnez l'allure de leurs courbes.

Résoudre une équation ou une inéquation

- On peut procéder par équivalences en faisant des opérations. Dans le cas d'une inéquation, il faut vérifier à chaque étape si le symbole d'inégalité est modifié.
- La résolution d'une équation ou d'une inéquation de degré 1 ou 2 revient à étudier une fonction affine ou un polynôme de degré 2.
- Pour une équation ou une inéquation polynomiale de degré $\geqslant 2$ il faut factoriser et se ramener à comparer un produit de facteurs de degrés 1 et 2 à 0.
  - Pour une équation : un produit est nul si, et seulement si, un (au moins) des facteurs est nul.
  - Pour une inéquation : on étudie le signe de chaque facteur puis on construit un tableau de signes.
- Pour appliquer une fonction aux deux membres d'une équation ou d'une inéquation, il faut être vigilant : on ne peut appliquer que les fonctions bijectives et, dans le cas d'une inéquation, la fonction doit être monotone (si elle est décroissante elle retourne l'inégalité). En particulier, exp et ln sont bijectives et croissantes.

Dérivation

- Si f est dérivable on note f' sa dérivée. Si l'on souhaite dériver une quantité qui n'a pas de nom, on utilise la **notation différentielle**. On écrira ainsi $\cos'(x)$ ou $\frac{\mathrm{d}(3x+2)}{\mathrm{d}x}$.

- Pour calculer une dérivée on se sert :
  - des dérivées des fonctions de référence (qu'il faut connaître parfaitement).
  - des formules de dérivation :

$$(f+g)'=f'+g' \quad ; \quad (f\times g)'=f'\times g+f\times g' \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}.$$

  - On peut également dériver une **composée** de fonctions dérivables avec la formule : $(f\circ g)'=f'\circ g\times g'$.

Primitives

Pour déterminer une primitive on peut utiliser les tableaux des primitives qui sont une écriture « à l'envers » des tableaux de dérivation. Notamment :

Si f est de la forme...	$u'u^n$	$u'\mathrm{e}^u$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
alors une primitive est $F=$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	e^u	$\ln\lvert u\rvert$	$2\sqrt{u}$

Symboles de sommes et de produits

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{p+n} u_k$ est la somme : $u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_{p+n-1}+u_{p+n}$.
- La notation $\sum$ est meilleure que celle avec les pointillés car on peut représenter les sommes de peu de termes (les pointillés tels qu'ils sont écrits ci-dessus suggèrent qu'il y a au moins quatre termes).
- Si besoin, on peut changer l'indice dès lors que l'on représente la même somme.

  Par exemple : $\displaystyle\sum_{k=5}^{8} u_k=u_5+u_6+u_7+u_8=\sum_{k=0}^{3} u_{5+k}$.
- Pour les produits, la notation $\displaystyle\prod_{k=p}^{p+n} u_k=u_p\times\ldots u_{p+n}$ est similaire.

Exercices

Pratique calculatoire

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
a)	L'intervalle $[1;2]$ est un ensemble infini.	☐	☐
b)	$\mathbb{N}$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.	☐	☐
c)	Le carré d'un nombre est toujours supérieur ou égal à ce nombre.	☐	☐
d)	$\lvert x-5\rvert=\pi$ a une infinité de solutions.	☐	☐
e)	Deux polynômes ayant les mêmes racines sont égaux.	☐	☐
f)	Une équation trigonométrique peut ne pas avoir de solutions	☐	☐
g)	$\cos x=\frac{1}{2}$ a deux solutions.	☐	☐
h)	La courbe d'équation $y=\ln(x^2+x-2)$ a une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x$.	☐	☐
i)	On peut avoir $\lim_{+\infty} f=\lim_{+\infty} g=+\infty$ et $\lim_{+\infty} \frac{f}{g}=+\infty$.	☐	☐
j)	On peut avoir $\lim_{+\infty} f=\lim_{+\infty} g=+\infty$ et $\lim_{+\infty} \frac{f}{g}=-3$.	☐	☐

Exercices guidés

●○○ **Exercice A** (10 min.)

La masse d'une balle de tennis est de 58 g. La vitesse instantanée au service (pour un bon joueur) est comprise entre 180 et 210 km/h. Encadrer l'énergie cinétique correspondante.
On rappelle que l'énergie cinétique est donnée par la formule :

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(avec E : l'énergie cinétique en J, } m \text{ : la masse en kg, } v \text{ : la vitesse en m/s).}$$

●○○ **Exercice B** (10 min.)

On s'intéresse à l'équation $(E)\ :\ 3x^3+x^2-5x+1=0$.

1. Conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation.
2. Prouver que 1 est une solution de l'équation.
3. Trouver des réels a, b et c tels que $3x^3+x^2-5x+1=(x-1)(ax^2+bx+c)$.
4. En déduire les solutions de (E).

●○○ **Exercice C** (5 min.)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x = 0,1$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour $\sin x$?
2. On sait de plus que $-\pi < x < 0$, que vaut $\tan x$?
   (On rappelle que, pour tout x tel que $\sin x \neq 0$, $\tan x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$*.)*

●○○ **Exercice D** (5 min.)

1. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, $n^2 - n$ est pair.
2. Prouver le résultat précédent sans récurrence.

Exercices

●○○ **Exercice 1** (5 min.)

Sans calculatrice, ranger les nombres suivants par ordre croissant.

$$a = -1 \quad b = \tfrac{10^3}{999} \quad c = -10^{-4} \quad d = \tfrac{3}{\pi} \quad e = 1 \quad f = -c \quad g = 0 \quad h = (10^{-2})^2 \quad i = 0,13 \quad j = 0,2\,.$$

●●○ **Exercice 2** (10 min.)

Résoudre $2x^3 + 3x^2 - x + 2 = 0$.

●●○ **Exercice 3 Manipuler les formules de trigonométrie** (10 min.)

Soit a et b deux réels. En remarquant que $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$, factoriser l'expression $\cos a + \cos b$.

●●○ **Exercice 4** (15 min.)

Étudier la fonction définie par l'expression $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 1)$.

●●○ **Exercice 5** (15 min.)

Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

●●○ **Exercice 6 Sommes des termes de suites arithmétiques et géométriques** (15 min.)

1. **Suites arithmétiques :**
   (a) On considère la suite arithmétique de premier terme -3 et de raison 2, c'est-à-dire la suite définie pour tout entier naturel n par l'expression $u_n = 2n - 3$.
   En faisant apparaître $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (b) u désigne à présent la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$?

2. **Suites géométriques :** soit un réel $q \neq 1$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}$.
   (b) v désigne une suite géométrique de raison q, c'est-à-dire la suite définie pour tout entier n par $v_n = v_0 q^n$ (avec v_0 le premier terme de v).
   Que vaut $\sum_{k=1}^{n} v_k$?

●●○ Exercice 7 (10 min.)

1. Prouver que pour tout entier k on a $\dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!} = \dfrac{k}{(k+1)!}$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

●●● Exercice 8 (20 min.)

1. Soit $\theta \in [0;\pi]$. Résoudre l'équation $\cos(3\theta) = \cos(2\theta)$.
2. En remarquant que $3\theta = 2\theta + \theta$, prouver que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).$$
3. Montrer qu'en posant $X = \cos\theta$, l'équation $\cos(3\theta) = \cos(2\theta)$ devient :
$$(E)\ :\ 4X^3 - 2X^2 - 3X + 1 = 0.$$
4. Résoudre (E).
5. Quelle est la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$?

Corrigés

Pratique calculatoire

Corrigés des Vrai/Faux

a) Vrai. Il y a une infinité d'éléments dans cet ensemble, autrement dit : il y a une infinité de réels compris entre 1 et 2. (Attention à ne pas confondre ensemble *infini* et ensemble *borné*, ce qu'est $[1;2]$.)

b) Faux. $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas un intervalle.

c) Faux. Par exemple, $\frac{1}{2}$ est supérieur à $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

d) Faux. Les deux solutions de $|x-5| = \pi$ sont $5-\pi$ et $5+\pi$, ce sont les deux nombres dont la distance à 5 vaut π.

e) Faux. Par exemple, $P(x) = x$ et $Q(x) = x^2$ ont pour seule racine 0 mais ce sont des polynômes différents.

f) Vrai. Par exemple, $\cos x = 2$ n'a pas de solution car un cosinus est dans $[-1;1]$.

g) Faux. Il y a deux points sur le cercle trigonométrique ayant pour abscisses $\frac{1}{2}$ mais ils correspondent à une infinité de mesures. Ces mesures sont de la forme $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

h) Vrai. Soit $f(x) = \ln(x^2+x-2)$. $f(x)$ existe si, et seulement si, $x^2+x-2>0$.
$x^2+x-2>0 \iff (x-1)(x+2)>0 \iff x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$. Notons $\mathscr{D}_f$ cet ensemble et remarquons que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ (en tant que composée de fonctions dérivables).
Pour $a \in \mathscr{D}_f$, la tangente à $y = f(x)$ au point $(a; f(a))$ a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$; cette tangente est parallèle à la droite $y = x$ si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont égaux, c'est-à-dire si, et seulement si, $f'(a) = 1$.
$\forall x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ et donc $\forall a \in \mathscr{D}_f$, $f'(a) = 1 \iff \frac{2a+1}{a^2+a-2} = 1 \iff -a^2+a+3 = 0$.
Cette dernière équation a pour discriminant $\Delta = 13$ donc ses solutions sont $a_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ et $a_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ mais on écarte $a_1 \notin \mathscr{D}_f$.
Finalement, $y = f(x)$ admet une unique tangente parallèle à $y = x$: sa tangente au point $(a_2; f(a_2))$.

i) Vrai. Par exemple en prenant $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

j) Faux. Beaucoup de situations sont envisageables pour cette F.I. mais, étant donné que $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} g = +\infty$ on peut affirmer que lorsque x est suffisamment grand, $f(x)$ et $g(x)$ sont strictement positifs, donc le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ l'est aussi. La fonction $\frac{f}{g}$ peut converger vers un réel, mais seulement un réel positif. (Par exemple pour $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$ on a $\lim_{+\infty} \frac{f}{g} = 2$.)

Corrigés des exercices guidés

Exercice A

Commençons par convertir les données dans les unités pour lesquelles la formule est donnée :

- masse : $m = 0,058$ kg
- vitesse :1 km/h $= 1\,000$ m/3 600 s $= 1/3,6$ m/s $= \frac{1}{\frac{36}{10}}$ m/s $= \frac{10}{36}$ m/s $= \frac{5}{18}$ m/s.

La vitesse de la balle en m/s est donc v avec $180 \times \frac{5}{18} \leqslant v \leq 210 \times \frac{5}{18}$ ce qui donne $50 \leqslant v \leqslant \frac{7 \times 5^2}{3}$.
La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $2\,500 \leqslant v^2 \leqslant \frac{7^2 \times 5^4}{9}$. On multiplie par $\frac{m}{2} = \frac{58}{1000 \times 2}$:

$$2\,500 \times \frac{58}{1\,000 \times 2} \leqslant \frac{m}{2} v^2 \leqslant \frac{7^2 \times 5^4}{3^2} \times \frac{58}{1\,000 \times 2} \Leftrightarrow \frac{5 \times 29}{2^2} \leqslant \mathrm{E} \leqslant \frac{7^2 \times 5 \times 29}{3^2 \times 2^3}$$

Avec des valeurs décimales (et approchées à 10^{-3}) , on a $36,25 \leqslant \mathrm{E} \leqslant 98,681$ (en J).

Exercice B

1. On conjecture l'existence de trois solutions.
2. On calcule $3 \times 1^3 + 1^2 - 5 \times 1 + 1 = 3 + 1 - 5 + 1 = 0$ donc 1 est bien une solution de (E).
3. On développe puis on identifie les coefficients de mêmes degrés :

$$3x^3 + x^2 - 5x + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c) \iff 3x^3 + x^2 - 5x + 1 = ax^3 + x^2(b-a) + x(c-b) - c$$
$$\iff \begin{cases} 3 = a \\ 1 = b - a \\ -5 = c - b \\ 1 = -c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}.$$

On en déduit que $3x^3 + x^2 - 5x + 1 = (x-1)(3x^2 + 5x - 1)$.

4. On a donc $(E) \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0$ ou $3x^2 + 4x - 1 = 0$. On résout $3x^2 + 5x - 1 = 0$: $\Delta = 16 + 12 = 28 > 0$, il y a donc deux solutions : $\frac{-4-\sqrt{28}}{6} = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{-4+\sqrt{28}}{6} = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{1; \frac{-2-\sqrt{7}}{3}; \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right\}$.

Exercice C

1. On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on en déduit que $\sin^2 x = 0,99$ donc $\sin x \in \{\sqrt{0,99}; -\sqrt{0,99}\}$.
2. $-\pi < x < 0$ implique que $\sin x < 0$ donc $\sin x = -\sqrt{0,99}$. On en déduit que $\tan x = \frac{\sqrt{0,99}}{0,1} = 10\sqrt{0,99}$.

Exercice D

1. Prouvons par récurrence que pour tout entier n le nombre $n^2 - n$ est pair.

- **Initialisation :** pour $n = 0$ on a $n^2 - n = 0 - 0 = 0$ qui est bien un nombre pair.
- **Hérédité :** supposons qu'il existe un entier n tel que $n^2 - n$ soit pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n^2 - n = 2 \times k$. Montrons qu'alors $(n+1)^2 - (n+1)$ est également un nombre pair. On a : $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = (n^2 - n) + 2n = 2k + 2n = 2(k+n)$. $(n+1)^2 - n^2$ est donc bien un nombre pair.

CORRIGÉS

• **Conclusion :** la propriété a été initialisée pour $n=0$, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel.

2. Pour tout entier naturel n, $n^2-n=n(n-1)$.

Pour $n=0$, $n(n-1)=0$ est pair. Pour $n>0$, n et $n-1$ sont deux entiers successifs donc l'un est pair et donc leur produit est pair. Il suit que n^2-n est également pair.

Corrigés des exercices

Exercice 1

On a : $a<c<g<f=h<i<j<b<e<d$.

Pour comparer des nombres il est pratique d'avoir leur écriture décimale ou une approximation de leur écriture décimale. Par exemple, $\frac{10^3}{999}=\frac{1\,000}{999}$ vaudra à peu près 1 mais en étant supérieur à 1 car $1\,000>999$.

Exercice 2

On pose $P(x)=2x^3+3x^2-x+2$. On remarque que -2 est racine évidente de P. Il est donc possible de factoriser $P(x)$ par $(x+2)$; autrement dit, il existe un polynôme $Q(x)$ qui vérifie $P(x)=(x+2)Q(x)$. Puisque le degré de P est 3 et celui de $x+2$ est 1 alors celui de Q est 2. Autrement dit, il existe des réels a, b et c tels que $P(x)=(x+2)(ax^2+bx+c)$. On développe et on identifie les coefficients pour obtenir $a=2$, $b=-1$ et $c=1$. Finalement $P(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0$ ou $2x^2-x+1=0$. Le polynôme du second degré $2x^2-x+1$ a un discriminant strictement négatif, l'équation $2x^2-x+1=0$ n'a donc pas de solution. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\{1\}$.

Exercice 3

On vérifie l'indication donnée : $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b+a-b}{2}=a$ et $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b-ba+b}{2}=b$.

On a donc $\cos a+\cos b=\cos\left(\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a-b}{2}\right)$.

On applique la formule d'addition des arcs dans le membre de droite et on a :

$$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Exercice 4

• **Domaine de définition :** soit $P(x)=x^2+3x+1$. $f(x)$ a du sens si, et seulement si, $P(x)>0$. P a pour discriminant $\Delta=5$ donc P admet deux racines distinctes : $x_1=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Le coefficient dominant de P est strictement positif donc $P(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$. Finalement, f est définie sur le domaine $\mathscr{D}_f=]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$.

- **Limites aux bornes du domaine :** $\mathscr{D}_f$ a quatre bornes, donc il y a quatre limites à déterminer.

$\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X=+\infty$ donc, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
De manière analogue, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
$\lim\limits_{x\to x_1^-} P(x)=0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln X=-\infty$ donc, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to x_1^-} f(x)=-\infty$.
De manière analogue, $\lim\limits_{x\to x_2^+} f(x)=-\infty$.

- **Variations :** $f=\ln\circ P$ est dérivable en tant que composée de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\ f'(x)=\ln'(P(x))\times P'(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{2x+3}{x^2+3x+1}.$$

Sur $\mathscr{D}_f$,le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+3$ on déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		x_1	$-\frac{2}{3}$	x_2		$+\infty$
Signe de $2x+3$		$-$		0		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖		‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5

On procède par récurrence pour établir que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- **Initialisation :** pour $n=1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3=1^3=1$ et $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$ donc la propriété est vraie.
- **Hérédité :** supposons qu'il existe un entier non nul n tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Montrons qu'alors la propriété est également vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3=\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\sum_{k=1}^{n} k^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4(n+1)\right)=\frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4n+4\right)$$

On reconnaît une égalité remarquable : $n^2+4n+4=(n+2)^2$ et on a bien $\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

- **Conclusion :** la propriété a été initialisée pour $n=1$, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier non nul.

Exercice 6

1. (a) On a : $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k=\sum\limits_{k=1}^{n} 2k-3=\sum\limits_{k=1}^{n} 2k+\sum\limits_{k=1}^{n} -3=2\sum\limits_{k=1}^{n} k+n\times(-3)$.

Or, $\sum\limits_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k=2\dfrac{n(n+1)}{2}-3n=n(n+1)-3n=n(n-2)$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} kr + u_0 = \sum_{k=1}^{n} kr + \sum_{k=1}^{n} u_0 = r\sum_{k=1}^{n} k + n\times u_0 = r\,\frac{n(n+1)}{2} + n\times u_0.$

2. (a) Pour $n=0$ le résultat est évident. Sinon, on développe puis on travaille les sommes :

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k - (\sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}.$$

(b) On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} v_0 q^k = v_0 \sum_{k=0}^{n} q^k$. Puisque $q \neq 1$ on peut diviser la relation prouvée à la question précédente par $1-q$ et on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 7

1. $\displaystyle\forall k\in\mathbb{N},\ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}\times\frac{k+1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{k!} = \frac{k}{(k+1)!}.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}.$

Ces deux sommes sont **télescopiques**, c'est-à-dire que leurs termes vont pour la plupart se compenser deux-à-deux. Finalement, il ne restera que le premier terme de la première somme et le dernier terme de la seconde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$

Exercice 8

1. $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(3\theta)=\cos(2\theta) \Longleftrightarrow 3\theta = 2\theta + k\times 2\pi \quad\text{ou}\quad 3\theta = -2\theta + k\times 2\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$

$\Longleftrightarrow \theta = k\times 2\pi \quad\text{ou}\quad \theta = k\times\frac{2\pi}{5} \qquad (k\in\mathbb{Z}).$

Les solutions dans $[0;\pi]$ sont donc 0, $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$.

2. Pour tout réel θ, on a :

$\cos(3\theta) = \cos(\theta+2\theta) = \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) = \cos(\theta)(\cos^2(\theta)-1) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta).$
On substitue $1-\cos^2\theta$ à $\sin^2\theta$ et on obtient : $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.

3. En posant $X=\cos\theta$ on a $\cos(3\theta)=\cos(2\theta)$ qui devient $4X^3-3X = X^2-1$. Cette dernière équation est équivalente à $4X^3-2X^2-3X+1=0$.
4. $4X^3-2X^2-3X+1$ a pour racine évidente 1 donc on peut le factoriser par $X-1$ et on trouve :

$$4X^3-2X^2-3X+1 = (X-1)(4X^2+2X-1).$$

On a donc $(E) \Leftrightarrow X=1$ ou$4X^2+2X-1=0 \Leftrightarrow X\in\left\{1;\frac{-1+\sqrt5}{4}\,\frac{-1-\sqrt5}{4}\right\}$.

5. D'après les questions précédentes, les solutions de (E) sont $\cos 0$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. On a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\in]0;1[$ donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt5}{4}$.

VUIBERT PRÉPAS

MATHS
TSI 1re année

VUIBERT PRÉPAS, des ouvrages pour faire la différence :
- des cours complets pour acquérir les connaissances indispensables ;
- des fiches de synthèse pour réviser l'essentiel avant les khôlles ou les épreuves ;
- de nombreux exercices intégralement corrigés pour s'entraîner : vrai/faux, exercices guidés et d'approfondissement.

SOMMAIRE :

Les auteurs

Keven Commault *est professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée Joseph Gaillard à Fort-de-France.*

Éric Mercier *est professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée Jean Perrin à Saint-Ouen-l'Aumône.*

Stéphane Passerat *est professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée Louis Vincent à Metz.*

Emily Tournesac *est professeur en classes préparatoires scientifiques au lycée Antonin Artaud à Marseille.*

ISBN : 978-2-311-40255-1

9 782311 402551

www.vuibert.fr