PC
Mathématiques · Informatique
2018

Sous la coordination de

William Aufort
ENS Lyon
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Lyon)

Benjamin Monmege
enseignant-chercheur à l'université
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Philippe Bouafia
professeur agrégé en école d'ingénieurs

Céline Chevalier
enseignant-chercheur à l'université

Sélim Cornet
ENS Paris-Saclay

Loïc Devilliers
ENS Paris-Saclay

Hervé Diet
professeur agrégé

Guillaume Duboc
ENS Lyon

Jean-Julien Fleck
professeur en CPGE

Emma Kerinec
ENS Lyon

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

Sommaire thématique de mathématiques

2015 – 2018

	Structures algébriques et arithmétique	Polynômes	Algèbre linéaire générale	Réduction des endomorphismes	Produit scalaire et espaces euclidiens	Topologie des espaces vectoriels normés	Suites et séries numériques	Suites et séries de fonctions	Séries entières	Analyse réelle	Intégration	Équations différentielles	Fonctions de plusieurs variables	Dénombrement et probabilités
CCP MP Maths 1		•	•		•		•	••••	••	•	•••		•	••
CCP MP Maths 2	•	•	••	••••	•••						•	•		•
CCP PC Maths		••	••	••	•	•		•	••		•••			•••
CCP PSI Maths			••	•••	•	•	•		••	•	•	•••		•
Centrale MP Maths 1			•	••		•					•	•		•
Centrale MP Maths 2							•	•	••		•••	•	•	••
Centrale PC Maths 1		•	••	••					•••		••	•	•	•••
Centrale PC Maths 2	•	•	•				•	••		•	•			••
Centrale PSI Maths 1		•	••	••		•	•			•				•••
Centrale PSI Maths 2		•	••				•		•	••	•••	•	•	••
Mines MP Maths 1			•	•	•		•	•				•		•••
Mines MP Maths 2		•	•	•	•	••	•	•			•		•	•
Mines PC Maths 1			••	•			••		•	••				••••
Mines PC Maths 2		•	•				•		•	•	••	••	•	•
Mines PSI Maths 1			••	•			••		•	••				••••
Mines PSI Maths 2			•••	•						•	•			•
X/ENS MP Maths A		••	•••	•••	•	••								
X/ENS MP Maths B		•			•	•		••		•••	•••		•	•
X/ENS PC Maths			••	••		•				••	•		•	••
X/ENS PSI Maths		••	•••		••	•				•		••	•	

SESSION 2018 **PCMA002**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est constitué d'un seul problème en six parties.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

PROBLÈME

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

Q1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

Q2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

Q3. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X - 1)^{n-1}(X + 1)^{n-1}(X - \alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Q5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

Q6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note $x_1, \ldots, x_n$, en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

Q7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions **Q8** à **Q13**, n désigne un entier naturel.

Q8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

Q9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

Q10. Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question* **Q9**.

Q11. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

Q12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question **Q11**, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.

Q13. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question* **Q12**.

Q14. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ.

CCP Maths PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Romain Panis (ENS Ulm) et Guillaume Batog (professeur en CPGE).

Ce long problème est consacré à une étude assez extensive des polynômes de Legendre. Il commence par des résultats généraux et aboutit en dernière partie à une application, dite méthode de Gauss-Legendre, à l'approximation d'intégrales.

- Des généralités sur les polynômes de Legendre, notés L_n $(n \in \mathbb{N})$, font l'objet de la première partie, plutôt facile.
- La deuxième partie étudie un endomorphisme sur les polynômes et montre que les polynômes de Legendre sont justement des vecteurs propres de cet endomorphisme.
- Dans la troisième partie, le sujet exploite des propriétés des polynômes de Legendre afin de déterminer la distance d'un polynôme quelconque à $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- La quatrième partie donne l'expression explicite de la série génératrice de la suite $(\mathrm{L}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et conclut sur une méthode pour en déduire les valeurs des $\mathrm{L}_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\,-1\,;1\,]$.
- La cinquième partie passe par des expressions intégrales pour déterminer exactement le rayon de convergence de la série génératrice de la partie IV.
- La sixième partie montre une application des polynômes de Legendre à l'approximation d'intégrales.

Finalement, c'est un sujet long qui alterne des questions faciles et d'autres un peu plus techniques. Les thèmes abordés relèvent principalement du programme d'analyse (avec une emphase particulière sur les polynômes), même si l'on rencontre quelques questions d'algèbre linéaire, de diagonalisation et de produits scalaires. Les parties étant liées, c'est une bonne occasion d'apprendre à se repérer dans un problème et à réutiliser les bonnes questions au bon moment.

Indications

Partie I

2 Commencer par le degré et le coefficient dominant de U_n.

4 Les racines multiples de U_n sont également des racines de ${\mathrm{U}_n}'$. Penser ensuite au théorème de Rolle pour prouver l'existence de α.

5 Utiliser également le théorème de Rolle afin de trouver des racines entre deux α_i consécutifs, puis exploiter le degré de ${\mathrm{U}_n}^{(k+1)}$ afin de prouver qu'il n'y a pas d'autres racines.

6 Pour $n \geqslant 2$ fixé, raisonner par récurrence finie sur $k \in [\![1\,;n]\!]$ et appliquer les questions 4 et 5.

Partie II

10 À l'aide de la question 9, déterminer le polynôme caractéristique de M.

12 Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$. Si f et g sont deux fonctions dérivables, la formule de Leibniz assure que :

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)}$$

13 Remplacer ${\mathrm{U}_k}^{(k)}$ par L_k dans la formule de la question 12.

14 Commencer par déterminer les éléments propres de ϕ_n. Chercher ensuite ceux de ϕ en se ramenant à ϕ_n, où n est le degré du vecteur propre considéré.

Partie III

15 Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

16 Partir de l'intégrale de droite et effectuer une intégration par parties en dérivant $t \longmapsto (t^2-1)\mathrm{P}'(t)$ et en intégrant $t \longmapsto \mathrm{Q}'(t)$.

17 Utiliser le résultat de la question 16 en injectant celui de la question 13.

20 Penser au projeté orthogonal. Exprimer $\|\mathrm{P}-\mathrm{T}_n\|^2$ en fonction de $\|\mathrm{P}\|^2$ et $\|\mathrm{T}_n\|^2$ grâce au fait que T_n et $\mathrm{P}-\mathrm{T}_n$ sont orthogonaux. Enfin, décomposer T_n dans la base orthonormale $(\mathrm{Q}_0, \ldots, \mathrm{Q}_n)$.

Partie IV

22 Commencer par déterminer la valeur de r avant de suivre l'indication de l'énoncé.

23 Majorer le terme général de la série pour $|t| < 1/r$.

24 Une fois les changements d'indice effectués, penser à utiliser la relation donnée dans l'énoncé au début de la partie.

25 Vérifier que la fonction $t \longmapsto 1 - 2tx + t^2$ ne s'annule pas sur $]\,-1/r\,;1/r\,[$, diviser l'équation par cette valeur et exprimer sa solution générale.

Partie V

27 Majorer $|v_n(u)|$ indépendamment de u.

28 Reconnaître $v_n(u)$ dans le terme général de la somme, puis échanger somme et intégrale grâce à la convergence normale.

29 Se souvenir de la formule $1/\cos^2(x) = 1 + \tan^2(x)$ pour tout x dans l'intervalle de définition de la fonction tangente. Conclure à l'aide du changement de variable $u = v/\sqrt{1+a^2}$.

31 Séparer parties réelle et imaginaire. Pour la première, utiliser la question 30 en prenant garde aux bornes de l'intégrale. La seconde est nulle grâce à la question 29.

32 Utiliser les questions 25, 28 et 31.

33 Pour tout $x \in [-1\,;1]$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. Conclure à l'aide de la question 32.

34 D'après la question 33, la relation est vraie si $z \in]-1\,;1[$. L'étendre à $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \mathrm{R}(x)$ en considérant la série entière de la variable complexe $\sum \mathrm{L}_n(x) z^n$ et l'unicité du développement en série entière. Aboutir à une contradiction en calculant le module des racines complexes de $z^2 - 2xz + 1$.

Partie VI

35 Montrer par récurrence que, pour tout $k \in [\![0\,;2n-1]\!]$, la fonction $h^{(k)}$ s'annule au moins $2n-k$ fois sur $\mathbb{R}$. Pour cela, appliquer le théorème de Rolle sur chaque intervalle entre les racines de $h^{(k)}$.

36 Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, considérer le polynôme

$$\mathrm{P}_i(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (\mathrm{X} - x_k) \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$$

40 Montrer que l'application linéaire suggérée par l'énoncé est bijective.

41 Déterminer K pour que g s'annule en x. Montrer que g' s'annule en $x_1, \dots, x_n$ et trouver n autres racines en appliquant le théorème de Rolle sur tous les intervalles entre deux racines consécutives de g. Appliquer alors la question 35 et simplifier le résultat obtenu en remarquant que H_n et ${\mathrm{A}_n}^2$ sont des fonctions polynomiales de degrés $2n-1$ et $2n$.

42 Il reste à montrer cette propriété pour $y = x_i$ avec $i \in [\![1\,;n]\!]$.

43 Utiliser successivement les questions 40, 38 et 42, puis majorer l'intégrande obtenu à l'aide de $\mathrm{M}_{2n}(f)$.

44 Exprimer A_n en fonction de L_n d'après les questions 2 et 6, puis exploiter l'égalité admise dans la question 19. Conclure à l'aide de la formule de Stirling :

$$p! \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\,p\,\pi}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p$$

I. Quelques résultats généraux

1 On a $\mathrm{U}_0 = 1$, d'où ${\mathrm{U}_0}^{(0)} = 1$, puis

$$\boxed{\mathrm{L}_0 = 1}$$

De même, $\mathrm{U}_1 = \mathrm{X}^2 - 1$, d'où ${\mathrm{U}_1}^{(1)} = 2\mathrm{X}$. Puisque $2^1 1! = 2$, il vient

$$\boxed{\mathrm{L}_1 = \mathrm{X}}$$

Enfin, $\mathrm{U}_2 = (\mathrm{X}^2 - 1)^2 = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2 + 1$, ${\mathrm{U}_2}^{(1)} = 4\mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}$ et ${\mathrm{U}_2}^{(2)} = 12\mathrm{X}^2 - 4$. Comme $2^2\, 2! = 8$, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{L}_2 = \frac{1}{2}(3\mathrm{X}^2 - 1)}$$

2 Le polynôme U_n est de degré $2n$. Comme il est dérivé n fois, avec $n \leqslant 2n$,

$$\boxed{\text{Le polynôme } \mathrm{L}_n \text{ est de degré } n.}$$

De plus, le monôme dominant de U_n est égal à X^{2n}, donc le coefficient dominant de L_n vaut

$$\frac{1}{2^n\, n!}(2n)(2n-1)\cdots(2n-(n-1)) = \frac{1}{2^n\, n!}(2n)(2n-1)\cdots(n+1)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{a_n = \frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}}$$

3 D'après la question 2, la famille $(\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n)$ est une famille de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de degrés étagés, elle est donc libre. En outre, son cardinal vaut $n+1$, qui est aussi la dimension de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, d'où

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].}$$

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $\mathrm{U}_n = (\mathrm{X}-1)^n(\mathrm{X}+1)^n$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ les racines de } \mathrm{U}_n \text{ sont } 1 \text{ et } -1\\ \text{et elles sont toutes les deux de multiplicité } n.\end{array}}$$

D'après les propriétés sur les multiplicités des racines, on sait que 1 et -1 sont alors racines de ${\mathrm{U}_n}'$ de multiplicité $n-1$. Comme $2(n-1) = 2n-2$ et que ${\mathrm{U}_n}'$ est de degré $2n-1$, on en déduit l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$${\mathrm{U}_n}' = \lambda\,(\mathrm{X}-1)^{n-1}(\mathrm{X}+1)^{n-1}(\mathrm{X}-\alpha)$$

Il reste à prouver que $\alpha \in \left]-1\,;1\right[$. On sait que

- U_n est à valeurs réelles ;
- U_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $[-1\,;1]$ et dérivable sur $\left]-1\,;1\right[$;
- $\mathrm{U}_n(1) = \mathrm{U}_n(-1) = 0$.

Par suite, le théorème de Rolle assure l'existence de $c \in \left]-1\,;1\right[$ tel que ${\mathrm{U}_n}'(c) = 0$. On en déduit que $c = \alpha$, puis que $\alpha \in \left]-1\,;1\right[$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha \in \left]-1\,;1\right[\text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tels que } {\mathrm{U}_n}' = \lambda\,(\mathrm{X}-1)^{n-1}(\mathrm{X}+1)^{n-1}(\mathrm{X}-\alpha).}$$

Centrale Maths 1 PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Guillaume Duboc (ENS Lyon) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Ce sujet propose d'étudier différents aspects de l'équation de diffusion, aussi appelée équation de la chaleur. Comme on fêtait en 2018 le 250$^{\text{e}}$ anniversaire de la naissance de Joseph Fourier, dont les travaux sont à l'origine de la théorie analytique de la chaleur, il est possible que ce problème ait été conçu dans le but de lui rendre hommage. Il est constitué de quatre parties.

- Dans la première, on définit la transformée de Fourier d'une fonction continue et intégrable, et on établit quelques propriétés de cette transformation.
- La deuxième partie vise à démontrer l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation de diffusion satisfaisant certaines conditions de domination et conditions aux limites. On commence par exhiber une solution, puis on utilise la transformée de Fourier pour prouver son unicité. Il est nécessaire dans cette partie de faire preuve d'un certain recul, car il faut fréquemment faire appel à des résultats démontrés plusieurs questions auparavant.
- On s'intéresse dans la troisième partie à la résolution de l'équation de diffusion d'un point de vue numérique. Une méthode d'approximation des solutions par différences finies est présentée ; il s'agit d'une généralisation de la méthode d'Euler pour les équations différentielles. On justifie d'abord le choix de la méthode numérique, puis on établit une condition nécessaire et suffisante pour que cette méthode soit stable grâce à des outils d'algèbre linéaire.
- Enfin, la dernière partie porte sur un modèle microscopique de diffusion : on s'intéresse au mouvement d'une particule sous l'effet de chocs avec des particules voisines, ce qui mène à l'étude d'une marche aléatoire.

Ce sujet est de longueur et de difficulté raisonnables, y compris sur le plan calculatoire. La difficulté est progressive au sein de chaque partie : les premières questions sont des applications directes du cours tandis que les dernières sont plus techniques. Ce problème conduit en outre à mettre en œuvre de nombreux raisonnements classiques d'analyse, d'algèbre linéaire et de probabilités : il permet donc de réviser de larges pans du programme et constitue un très bon sujet d'entraînement.

Indications

2 Effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégrale dont la valeur est donnée par l'énoncé.

5 Appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

6 Commencer par montrer que f admet une limite finie en $\pm\infty$ en exploitant l'intégrabilité de f', puis prouver que cette limite est nulle.

7 Faire une intégration par parties.

9 Partir de l'expression de M_p et intégrer par parties.

10 Développer la fonction cosinus en série entière.

11 Commencer par démontrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\cos(2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$$

Utiliser alors le résultat de la question 10.

15 Appliquer le théorème de convergence dominée.

16 Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On pourra s'appuyer sur les propositions (i) à (iii) pour montrer que l'hypothèse de domination est satisfaite.

17 Se rappeler que pour tout $t > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot)$, et faire appel aux résultats des questions 7 et 16.

18 Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente.

22 Déterminer un réel $\lambda_{t,\sigma}$ tel que les fonctions $f(t,\cdot)$ et $\lambda_{t,\sigma}g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$ aient la même transformée de Fourier.

23 Montrer que I est dérivable et que sa dérivée est nulle.

26 Appliquer la formule de Taylor-Young.

27 Regrouper les termes de rang n et de rang $n+1$, puis réécrire matriciellement la relation obtenue.

29 Montrer l'implication directe par contraposée en choisissant F_0 parmi les vecteurs propres de A. Pour la réciproque, décomposer un vecteur F_0 arbitraire dans une base de vecteurs propres de A.

32 Établir une expression du terme général de la suite $(y_k)_{k\in[\![\,0\,;\,q+1\,]\!]}$ à partir de la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 satisfaite par cette suite. Déterminer alors pour quels réels θ les conditions $y_0 = y_{q+1} = 0$ sont vérifiées.

34 Remarquer que les vecteurs propres de B sont aussi vecteurs propres de A. Déterminer alors une condition suffisante pour que les valeurs propres de A soient à valeurs dans $[\,-1\,;1\,]$ indépendamment du choix de q, puis montrer que cette condition est aussi nécessaire.

37 Exprimer d'abord S_n en fonction de Z_n.

39 Utiliser un encadrement de la partie entière.

40 Appliquer la formule des probabilités totales pour un système complet d'événements bien choisi.

I. Préliminaires

1 Remarquons d'abord que la fonction g_σ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, étant la composée de fonctions usuelles. Il faut donc étudier son intégrabilité au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. D'après le théorème des croissances comparées,

$$x^2 g_\sigma(x) = \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Cela signifie que $g_\sigma(x) = \mathrm{o}\left(1/x^2\right)$ au voisinage de $+\infty$. Or la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est positive et intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$ selon le critère de Riemann. D'après le théorème de comparaison des fonctions à valeurs positives, la fonction g_σ est par conséquent intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$. De même, $g_\sigma(x) = \mathrm{o}\left(1/x^2\right)$ au voisinage de $-\infty$, la fonction g_σ est donc aussi intégrable sur $]\,-\infty\,;-1\,]$. En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } g_\sigma \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

> On aurait également pu remarquer que la fonction g_σ est paire. Le fait qu'elle soit intégrable au voisinage de $+\infty$ implique donc qu'elle l'est aussi au voisinage de $-\infty$.

2 Calculons la valeur de l'intégrale de g_σ en effectuant le changement de variable $u = x/(\sigma\sqrt{2})$. Celui-ci s'inverse en $x = \sigma\sqrt{2}u$, ce qui donne $\mathrm{d}x = \sigma\sqrt{2}\,\mathrm{d}u$. Comme σ est strictement positif, il vient alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2)\sigma\sqrt{2}\,\mathrm{d}u \\
\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

dont on conclut que
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x = 1}$$

> L'intégrale
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$$
> porte le nom d'intégrale de Gauss, et son calcul peut s'effectuer de plusieurs manières. On trouvera par exemple une méthode utilisant les intégrales de Wallis dans le sujet CCP Maths 1 PSI de 2013.

3 La fonction g_σ est la composée de fonctions usuelles et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculons sa dérivée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_\sigma'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \frac{-2x}{2\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) = -\frac{x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_\sigma'(x)$ est du signe de $-x$ car l'exponentielle est toujours positive.

$$\boxed{\text{La fonction } g_\sigma \text{ croît donc sur }]\,-\infty\,;0\,[\text{ et décroît sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

Calculons la dérivée seconde. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

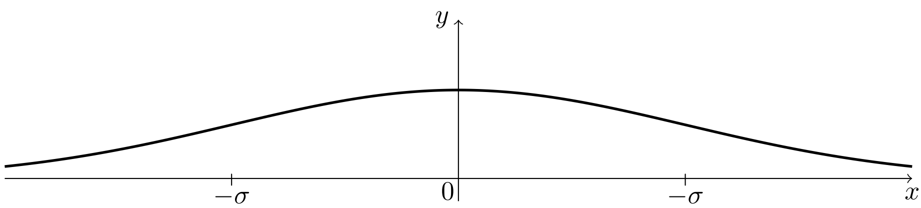
$$\begin{aligned} g_\sigma''(x) &= -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(1 \times \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) + x \times \frac{-2x}{2\sigma^2}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}\left(x^2 - \sigma^2\right)\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Celle-ci est du signe de $x^2 - \sigma^2$: elle est positive sur $]\,{-\infty}\,; -\sigma\,] \cup [\,\sigma\,; +\infty\,[$, négative sur $[\,-\sigma\,;\sigma\,]$ et s'annule en changeant de signe en $-\sigma$ et σ. Le tableau de variations et l'allure de la courbe représentative de g_σ sont donnés ci-dessous.

x	$-\infty$		0		∞
$g_\sigma'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_\sigma(x)$	0	$\nearrow$	$1/(\sigma\sqrt{2\pi})$	$\searrow$	0

On peut s'aider pour le tracé des remarques suivantes :

- La fonction g_σ est clairement paire : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\sigma(x) = 0$ d'après les croissances comparées : la courbe admet une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
- $g_\sigma'(0) = 0$, la courbe possède donc une tangente horizontale au point 0.
- La dérivée seconde de g_σ change de signe en $-\sigma$ et σ. La courbe présente par conséquent des points d'inflexion en $-\sigma$ et σ.



4 Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)| = |f(x)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Donc

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}.}$$

5 Posons $h(x,\xi) = f(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi\xi x)$ pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}$, et appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x,\xi)$ est continue par morceaux (et même continue).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto h(x,\xi)$ est continue.
- Pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$, $|h(x,\xi)| = |f(x)|$ et cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent $\boxed{\text{La fonction } \mathcal{F}(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

6 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, cette intégrale converge lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi, f possède une limite finie ℓ en $+\infty$, et par continuité de la valeur absolue,

$$|f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} |\ell|$$

Centrale Maths 2 PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Loïc Devilliers (ENS Cachan) ; il a été relu par Clément Mifsud (professeur en CPGE) et Sophie Rainero (professeur en CPGE).

Ce sujet a pour objet la fonction ζ de Riemann, définie par la somme de la série de fonctions

$$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Cette fonction est importante en mathématiques ; elle intervient notamment en arithmétique dans l'étude des nombres premiers.

- Dans la première partie, on étudie ζ sur son ensemble de définition. Cela peut sembler facile ; néanmoins, il faut rédiger de manière rigoureuse.
- La deuxième partie introduit la fonction auxiliaire

  $$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right)$$

  L'ensemble de définition de f n'étant pas un intervalle, l'étude de la fonction f demande un peu de prudence. Ensuite, on fait le lien entre le développement en série entière de f et la fonction ζ. Il en découle une expression sous forme intégrale de $\zeta(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$.
- Enfin, la troisième partie allie, avec élégance, les probabilités, l'arithmétique et la fonction ζ. Comme il y a très peu d'arithmétique au programme de PC, le sujet introduit toutes les notions et propriétés nécessaires. Après avoir défini deux variables aléatoires, on s'intéresse à la probabilité que deux entiers tirés au hasard soient premiers entre eux (c'est-à-dire que 1 soit leur seul diviseur positif commun). On établit un lien entre la fonction ζ et les nombres premiers. La dernière question, point d'orgue du sujet, montre que si on tire deux entiers de manière uniforme dans $[\![1\,; n]\!]$, alors la probabilité qu'ils soient premiers entre eux tend vers $1/\zeta(2)$ lorsque $n \to +\infty$.

Ce sujet est un beau problème d'analyse. Certaines questions assez techniques – comme la dérivation des intégrales à paramètre – sont à faire très méticuleusement, mais cet effort sera récompensé en fin de problème par l'obtention de jolis résultats. On peut ainsi proposer ce sujet d'une part comme outil de révision des séries de fonctions, des intégrales à paramètre, des fonctions développables en série entière et des probabilités, et d'autre part, pour être émerveillé par les mathématiques.

Indications

Partie I

2 Montrer la convergence normale sur tout segment de $\mathscr{D}_\zeta$.

Partie II

10 Déterminer l'ensemble des réels x tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n + x \neq 0$.

11 Montrer que f est décroissante sur tout intervalle I tel que $\mathrm{I} \subset \mathscr{D}_f$.

12 Pour $m \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(m)$ en fonction de $f(m-1)$.

13 Utiliser la question précédente pour trouver un équivalent de $f(\mathrm{M})$ quand M tend vers $+\infty$. En déduire un candidat naturel pour un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis prouver que ce candidat est bien un équivalent.

14 Pour $m \in \mathbb{N}^*$, écrire $f(x+m)$ en fonction de $f(x+m-1)$.

15 Dans la relation trouvée à la question 14, isoler le terme $(x+k)^{-1}$.

16 Utiliser le critère de d'Alembert.

17 Appliquer le théorème de dérivabilité k-ième des séries.

19 Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

22 Appliquer le théorème de dérivabilité k-ième des intégrales à paramètre pour dériver k fois la fonction f, puis utiliser la question 19.

Partie III

27 Calculer la variance de X grâce à $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$.

29 Utiliser l'équivalence de l'énoncé sur les nombres premiers divisant un entier ainsi que la question 28.

30 Appliquer le théorème de continuité monotone pour l'intersection d'événements, puis utiliser la question 28.

31 Montrer que les n événements $(\mathrm{X} \in p_i\mathbb{N}^*) \cup (\mathrm{Y} \in p_i\mathbb{N}^*)$, pour $i \in [\![1\,; n]\!]$, sont mutuellement indépendants.

33 En utilisant la question 32, majorer, pour tous m, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{k=m+1}^{+\infty} (\mathrm{W}_n = k)\right)$ par une quantité qui ne dépend pas de n.

35 Comparer W avec une variable aléatoire de loi ζ de paramètre 2.

I. Fonction zêta

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum 1/n^x$ est une série de Riemann de paramètre x. D'après le cours, cette série converge si et seulement si $x > 1$. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{D}_\zeta =]\,1\,;+\infty\,[}$$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\zeta_n \colon x \longmapsto n^{-x}$ définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Ainsi

$$\forall x \in]\,1\,;+\infty\,[= \mathscr{D}_\zeta \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta_n(x)$$

Appliquons le théorème de continuité des séries de fonctions.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction ζ_n est continue sur I.
- Soient α, $\beta \in]\,1\,;+\infty\,[$ avec $\alpha < \beta$. Montrons la convergence normale de la série de fonctions $\sum \zeta_n$ sur $\mathrm{I} = [\,\alpha\,;\beta\,]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ζ_n est une fonction positive et décroissante sur I, ainsi

$$\sup_{x\in\mathrm{I}} |\zeta_n(x)| = \sup_{x\in\mathrm{I}} \zeta_n(x) = \zeta_n(\alpha)$$

  Comme $\alpha \in \mathscr{D}_\zeta$, on en déduit que $\sum \sup\limits_{x\in\mathrm{I}} |\zeta_n(x)|$ converge. Par conséquent, $\sum \zeta_n$ converge normalement donc uniformément sur I. Ainsi, la série $\sum \zeta_n$ converge uniformément vers ζ sur tout segment de $\mathscr{D}_\zeta$.

Le théorème de continuité des séries de fonctions permet de conclure que

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est continue sur } \mathscr{D}_\zeta.}$$

3 Soient x, $y \in]\,1\,;+\infty\,[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x < y$ et $n \geqslant 2$. Alors $1^x = 1^y$ et $n^{-x} > n^{-y}$. Par combinaison de séries convergentes, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\zeta(x) - \zeta(y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y}\right) \\
&= \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \qquad \text{car pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y} \geqslant 0 \\
\zeta(x) - \zeta(y) &> 0 \qquad \text{car } \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} > 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est strictement décroissante sur } \mathscr{D}_\zeta.}$$

> Attention à ne pas raisonner de la manière suivante :
>
> $$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{\mathrm{M}} n^{-y} < \sum_{n=1}^{\mathrm{M}} n^{-x}$$
>
> donc par passage à la limite lorsque M tend vers $+\infty$
>
> $$\zeta(y) < \zeta(x)$$
>
> En effet, les inégalités strictes ne passent pas à la limite. C'est pour cela qu'un terme strictement positif a été isolé dans l'expression de $\zeta(x) - \zeta(y)$.

$\boxed{4}$ Grâce à la question 3, on sait que la fonction ζ est décroissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$. De plus, la fonction ζ est positive, car pour tout $x \in \mathscr{D}_\zeta$, $\zeta(x)$ est une somme de termes positifs. On en déduit que ζ est minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, on a montré que

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ admet une limite finie en } +\infty.}$$

> L'énoncé ne précise pas s'il veut qu'on démontre l'existence d'une limite finie ou pas. Dans le doute, on recommande de démontrer que la limite est finie.

$\boxed{5}$ Soit $x \in \mathscr{D}_\zeta = \,]\,1\,;+\infty\,[$. Considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. La fonction $t \longmapsto t^{-x}$ étant décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$, elle est décroissante sur $[\,n-1\,;n+1\,] \subset \,]\,0\,;+\infty\,[$. On en déduit que pour tout $t \in [\,n\,;n+1\,]$, $t^{-x} \leqslant n^{-x}$ donc par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_n^{n+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^x}$$

La majoration s'obtient de même en intégrant sur $[\,n-1\,;n\,]$ l'inégalité $t^{-x} \geqslant n^{-x}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_\zeta \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant 2 \quad \Longrightarrow \quad \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t}$$

$\boxed{6}$ Soient $x \in \mathscr{D}_\zeta = \,]\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{N}$ avec $\mathrm{M} \geqslant 2$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour $n \in [\![\,2\,;\mathrm{M}\,]\!]$, on a

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{M}} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{\mathrm{M}} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{\mathrm{M}} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\int_2^{\mathrm{M}+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{\mathrm{M}} \frac{1}{n^x} \leqslant \int_1^{\mathrm{M}} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$$

Ajoutons $1 = 1^x$ à chacun des membres de la ligne ci-dessus, puis calculons les intégrales des membres de droite et de gauche. Comme $x \in \mathscr{D}_\zeta$, en particulier, $x \neq 1$, on obtient

$$1 + \frac{(\mathrm{M}+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{2^{1-x}}{1-x} \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{M}} \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{\mathrm{M}^{1-x}}{1-x} - \frac{1}{1-x} + 1$$

Lorsque M tend vers $+\infty$, M^{1-x} et $(\mathrm{M}+1)^{1-x}$ convergent vers 0 car $x > 1$. Par passage à la limite, on en conclut que

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_\zeta \qquad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}}$$

$\boxed{7}$ Lorsque x tend vers 1^+, par continuité de $x \longmapsto (x-1)2^{x-1}$ en 1^+, $(x-1)2^{x-1}$ tend vers 0^+, donc $\left[(x-1)2^{x-1}\right]^{-1}$ tend vers $+\infty$. D'après la question 6, la fonction ζ est ainsi minorée par une fonction tendant vers $+\infty$ en 1^+. On en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ tend vers } +\infty \text{ en } 1^+.}$$

$\boxed{8}$ Lorsque x tend vers $+\infty$, $x-1$ et 2^{x-1} tendent vers $+\infty$. Ainsi, $(x-1)^{-1}$ et $\left[(x-1)2^{x-1}\right]^{-1}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. En appliquant le théorème d'encadrement au résultat de la question 6, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ tend vers 1 en } +\infty.}$$

Centrale Informatique MP-PC-PSI 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean-Julien Fleck (professeur en CPGE) et Guillaume Batog (professeur en CPGE).

Ce sujet d'informatique a pour objectif la simulation microscopique d'un gaz parfait. Le mouvement particulaire d'un tel gaz, abordé en physique en première année de prépa, permet de s'appuyer sur un modèle simple et accessible. L'étude est divisée en cinq parties de tailles sensiblement équivalentes.

- La première aborde l'initialisation de la simulation, c'est-à-dire le placement originel et aléatoire des particules dans l'espace. Si les premières questions, faciles, permettaient à tous les candidats d'engranger quelques points, les dernières sont beaucoup plus difficiles à cause d'un cahier des charges complexe ; elles donnaient l'occasion aux meilleurs candidats de se mettre en valeur. On notera une question 12 très difficile et relativement mal posée.
- On traite ensuite l'aspect physique du mouvement des particules, dans un modèle simplifié à une dimension. Les fonctions demandées sont, tout comme leur support physique, assez élémentaires.
- Dans la troisième partie, le problème de la gestion des différents événements pour un système de N particules est posé. Une solution intéressante est fournie et étudiée en détail, notamment au niveau de la complexité des algorithmes mis en jeu. Ces questions, intéressantes, demandent du temps et de l'attention pour être traitées correctement.
- La quatrième partie rassemble les résultats des questions précédentes pour établir les fonctions globales permettant la réalisation de la simulation. Elle demande d'avoir bien compris les différents modèles et outils utilisés précédemment et favorisait donc les candidats ayant pris le temps de réfléchir sur l'ensemble du sujet.
- Enfin, on exploite une base de données pour enregistrer une partie des informations liées à des simulations. Il s'agit de la partie la moins bien écrite du sujet. Les bases de données sont assez mal formées, très partielles pour les informations stockées et avec un formalisme éloigné des canons du domaine. Bien qu'il n'y ait que trois questions, elles sont répétitives.

Ce sujet est progressif et intéressant (la courte partie 5 exceptée). Le contexte utilisé est assez familier et la physique sous-jacente suffisamment simple pour ne pas poser de problème à la plupart des candidats. Les données sont représentées par des tableaux `numpy` car ils permettent l'addition et la multiplication par des scalaires. Il est donc nécessaire de savoir manipuler ces opérations. Il s'agit, pour les quatre premières parties, d'un bon entraînement accessible dès la fin de la première année. Les notions d'ingénierie numérique n'apparaissent pas, mais des questions associées à la représentation des nombres flottants sont présentes.

Indications

Partie I

1 Ne pas confondre la multiplication par un scalaire d'une liste Python ou d'un tableau `np.array`.

10 Il peut être profitable de commencer par un schéma d'une situation quelconque, sans hésiter à créer des positions proches ou éloignées les unes des autres. Puis dérouler l'algorithme en déplaçant les particules sur le schéma. Ne pas oublier de mettre en forme le retour comme une liste de tableaux `np.array`.

12 Le terme « histogramme » est très mal choisi. L'énoncé souhaite que l'on trace la fonction de densité de probabilité. Pour les cas $\mathrm{N} = 1$ et $\mathrm{N} = 5$, la réponse est intuitive. Mais pour le cas $\mathrm{N} = 2$, il faut multiplier des probabilités conditionnelles.

Partie II

17 Les tableaux `np.array` permettent l'utilisation de l'addition et de la multiplication de façon naturelle. La réponse attendue est très courte.

Partie III

20 Il s'agit bien d'une question en une dimension, ce qui simplifie largement l'étude. Trois cas sont possibles en fonction de la valeur précédente de la vitesse.

21 Comme à la question précédente, l'étude est en une dimension. Les deux particules ne se choqueront que si elles sont en train de se rapprocher, c'est-à-dire si leur distance diminue en valeur absolue.

22 Une fois trouvé l'endroit où insérer l'événement dans le catalogue, la méthode `insert`, dont l'énoncé donne l'aide en annexe, est incontournable.

23 La fonction demandée utilise les trois fonctions écrites précédemment. Les fonctions `tr` et `tc` ont un comportement similaire pour leur retour, notamment lorsqu'il n'y a pas d'événement associé. Ce retour est à tester avant la fabrication de l'événement.

26 Il faut bien compter toutes les complexités dans le pire des cas où chaque particule est capable de rencontrer toutes les autres. Le résultat peut être exprimé sous la forme d'une somme d'entiers consécutifs qui se simplifie.

27 Ne surtout pas aller chercher un algorithme trop compliqué ou éloigné du cours.

Partie IV

29 Mettre à jour les positions pour toutes les particules. Ensuite, ne mettre à jour que les vitesses des particules ayant interagi. Toutes les fonctions nécessaires ont déjà été écrites.

30 L'invalidation des événements doit se faire à la main, selon un test d'appartenance long à écrire, mais simple à concevoir.

31 On ne sait pas à l'avance combien d'itérations seront réalisées. À chaque itération, il faut commencer par supprimer les événements invalides en fin de catalogue.

33 L'erreur numérique associée à la représentation des valeurs flottantes est surtout proportionnelle à la valeur représentée.

Partie V

34 Il s'agit d'une requête d'agrégation selon un critère à définir.

35 Cette question est très proche de la précédente. La jointure n'est pas nécessaire.

36 La requête est plus longue à écrire, mais il suffit de traduire ce que dit l'énoncé.

I. Initialisation

> Pour la seconde fois, le concours Centrale-Supélec utilise la syntaxe des définitions de fonctions appelée « annotations ». Elle rend le code plus explicite en précisant les types des arguments et des retours des fonctions. Il est probable que cela devienne une habitude dans ce concours et c'est une bonne idée dont pourraient s'inspirer les autres.

$\boxed{1}$ La ligne 9 du code proposé crée un tableau `np.array` d'une unique valeur, générée aléatoirement entre 0 inclus et L exclu.

> Il fallait bien lire la documentation de la fonction `np.random.rand`, qui ne fait pas partie des fonctions à connaître.
>
> Attention à ne pas confondre le comportement de la multiplication sur les listes et sur les objets `np.array`. La multiplication d'une liste par un entier provoque une concaténation multiple de cette liste, comme il est rappelé dans l'annexe de l'énoncé, tandis que pour un `np.array` cela multiplie chaque élément du tableau par l'entier ou le flottant multiplicateur. Ce détail aurait pu être rappelé dans l'annexe.

$\boxed{2}$ L'argument `c` de la fonction `possible` peut être interprété à partir de l'appel à la fonction à la ligne 10. Il s'agit d'un tableau `np.array` à une dimension, contenant la position d'une nouvelle particule à placer parmi celles déjà présentes dans `res`.

$\boxed{3}$ La ligne 3 évacue les deux cas où le placement de la particule est impossible car trop près des bords de l'espace disponible. Elle conduit la fonction `possible` à renvoyer `False` s'il faut générer une nouvelle position.

$\boxed{4}$ Les lignes 4 et 5 testent pour chaque particule déjà présente si la nouvelle particule à insérer est trop proche. Elles ont la même conclusion que la ligne 3.

$\boxed{5}$ La fonction `possible` teste la possibilité de placement de la nouvelle particule. Elle renvoie `True` si c'est possible et `False` s'il faut générer une nouvelle position.

$\boxed{6}$ Le rejet réalisé à la ligne 3 peut être évité en générant une valeur comprise entre R et L − R, en remplaçant la ligne 9 par

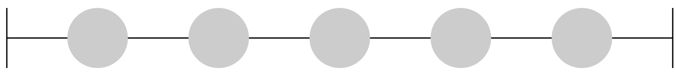
```
p = R + (L-2*R) * np.random.rand(1)
```

$\boxed{7}$ Dans la configuration proposée, chaque particule est espacée de 0,5 des deux particules adjacentes ou du bord. Il n'y a donc pas de place pour positionner une quatrième particule, et la boucle `while` devient une « boucle infinie ». Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite de l'appel à } \texttt{placement1D} \text{ ne termine pas.}}$$

$\boxed{8}$ Dans le cas où $N \ll N_{max}$, on peut supposer que presqu'aucun échec de placement de particule ne survient. Le contenu de la boucle `while` est alors répété N fois et contient des instructions de complexité constante ainsi qu'un appel à la fonction `possible`. Cette fonction est de complexité linéaire en le nombre d'éléments déjà dans `res`. Puisque $O(1 + 2 + 3 + \cdots + N) = O(N^2)$,

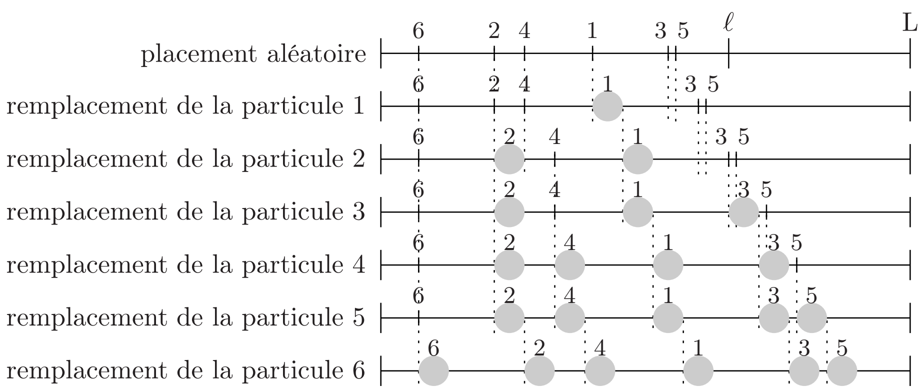
$$\boxed{\text{La complexité de la fonction } \texttt{placement} \text{ est quadratique.}}$$

> La somme des diamètres des particules à placer à la question 7 est pourtant inférieure à la longueur totale du segment. Cela signifie que le nombre N_{max} est certainement inférieur au rapport $L/(2\,R)$. Si l'on souhaite éviter la boucle infinie, il ne faut pas arriver pour autant à la situation où $N-1$ particules sont écartées l'une de l'autre et du bord d'une distance légèrement inférieure à $2\,R$. À la limite de ce raisonnement, la configuration est
>
> 
>
> Alors $$N_{max} = \left\lfloor \frac{L+2\,R}{4\,R} \right\rfloor$$

9 Pour recommencer à zéro le placement des particules dès qu'une nouvelle position est impossible, il suffit d'ajouter ce comportement lorsque `possible(p)` vaut `False`.

```
    res = []
    while len(res) < N:
        p = L * np.random.rand(1)
        if possible(p): res.append(p)
        else: res = []
    return res
```

10 L'énoncé demande une fonction en trois étapes. La troisième est une étape de déplacements successifs des particules, de l'espace $[\,0\,;\ell\,]$ vers l'espace $[\,0\,;L\,]$. Par exemple, ces déplacements peuvent être représentés par le schéma suivant :



Le placement rapide de N particules peut donc se faire ainsi :

```
def placement1Drapide(N, R, L):
    # Étape 1 : calcul de l'espace libre final
    l = L-2*R*N
    # Étape 2 : placement aléatoire des N particules sur [0; l]
    positions = l * np.random.rand(N)
    # Étape 3 : déplacement des particules
    for i in range(N):
        for j in range(N):  # Déplacement des particules à droite
            if positions[j] > positions[i]:
                positions[j] = positions[j]+2*R
        # Transformation en particule réelle
        positions[i] = positions[i]+R
```

Mines Maths 1 PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hervé Diet (professeur agrégé) ; il a été relu par Théo Lenoir (ENS Ulm) et Florian Metzger (docteur en mathématiques).

Ce sujet porte sur l'espace de Rademacher, défini comme le sous-ensemble $\Omega_{q,n}$ de $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ constitué des matrices à coefficients dans $\{-1,1\}$. On prouve le théorème de Komlós qui s'énonce ainsi : si $\mathrm{M}^{(n)}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\Omega_{n,n}$ qui suit la loi uniforme, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\det(\mathrm{M}^{(n)})=0)=0$$

En d'autres termes, une matrice aléatoire est inversible avec forte probabilité lorsque n est grand.

Le sujet fait largement appel aux matrices et aux probabilités. Il se compose de six parties connectées les unes aux autres.

- La première établit quelques majorations sur les coefficients binomiaux à l'aide de raisonnements classiques (équivalents, récurrences, etc.). Ces majorations permettront de calculer des limites dans la suite du sujet.
- La partie B étudie de manière exhaustive le cas de la dimension 2.
- La partie C donne quelques bornes sur les probabilités qui seront utilisées ultérieurement. Ces résultats sont établis en travaillant sur des espaces vectoriels.
- La partie D porte sur des aspects ensemblistes (cardinal, dénombrement) et sur les anti-chaînes qui sont les sous-ensembles de $\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$ dont les éléments sont incomparables (ni $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ ni $\mathrm{B}\subset\mathrm{A}$ si $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$). On démontre alors un théorème d'Erdös-Littlewood-Offord : si $v\in\mathbb{R}^n$ tel que $|v_j|\leqslant 1$ pour tout $j\in[\![\,1\,;n\,]\!]$, si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur 2 et si n est assez grand,

  $$\mathrm{P}\left(\langle \mathrm{L}_1^{(n)},v\rangle\in\mathrm{J}\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$$

  où $\mathrm{L}_1^{(n)}$ désigne la première ligne de la matrice aléatoire $\mathrm{M}^{(n)}$.
- Ce théorème est exploité dans la partie E. Cela permet de prouver des majorations nécessaires pour la suite.
- La dernière partie est consacrée à la démonstration du théorème de Komlós. On y exploite tous les résultats établis précédemment.

Le sujet est assez difficile pour la filière PC. Il comporte des raisonnements qui peuvent être déstabilisants et la manipulation des probabilités requiert beaucoup de rigueur. Comme le sujet suit une progression linéaire, il n'est pas judicieux de passer une partie puisqu'elle servira à coup sûr pour la suite. Cela en fait un sujet utile en fin de révision car il couvre nombre de thèmes d'algèbre au programme.

Indications

1 Étudier le rapport $\dbinom{n}{k+1} \Big/ \dbinom{n}{k}$. Étendre la propriété à $k > \lfloor n/2 \rfloor$ par symétrie des coefficients binomiaux.

2 Différencier les cas n pair et impair puis utiliser la formule de Stirling pour chercher un équivalent de $\dbinom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

3 Traiter le cas $k = 0$ à part. Faire un raisonnement par récurrence sur k.

4 Prouver que $\Omega_{1,n}$ engendre tous les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

5 Calculer l'espérance de $\mathrm{E}(\mathrm{M}_{1,1})$ puis utiliser les propriétés de l'espérance.

6 Appliquer la formule de transfert.

8 Commencer par déterminer les valeurs de

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}_{i,j} = \mathrm{M}_{k,l}) \text{ et } \mathrm{P}(\mathrm{M}_{i,j} = -\mathrm{M}_{k,l}) \text{ avec } (i,j) \neq (k,l)$$

On pourra ensuite poursuivre les calculs et noter que $\det(\mathrm{M}^{(n)}) = 0$ lorsque les colonnes L_1 et L_2 sont liées.

9 Utiliser l'équivalence démontrée pour décomposer l'événement $\big\{\det(\mathrm{M}^{(n)}) = 0\big\}$.

10 Définir une base de $\mathcal{H}^\perp$ et la relier aux $\alpha_{i,j}$.

11 La méthode du pivot de Gauss donne les $n - d$ pivots, et les colonnes sans pivot donnent les indices $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_d \leqslant n$.

12 Attention à tourner la page du sujet pour voir les indications.

13 Exploiter la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sans normaliser les vecteurs pour construire le vecteur voulu.

15 Étudier la restriction de σ à $\{1, \ldots, |\mathrm{A}|\}$.

17 Utiliser la question précédente pour décomposer l'ensemble $\mathcal{A}$.

19 Étudier la différence $\sum\limits_{j \in \mathrm{B}} v_j - \sum\limits_{j \in \mathrm{A}} v_j$ pour montrer qu'il reste au moins un élément et en déduire une minoration.

20 Prouver d'abord que $\mathcal{A}_\mathrm{J} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) \mid s_\mathrm{A} \in \mathrm{J}\}$ est une anti-chaîne.

21 Écrire la négation de la définition proposée.

23 Trouver une majoration de la probabilité désirée qui ne dépende que de n. Étudier la limite du produit de ce terme et de n pour conclure.

24 Raisonner par l'absurde sur le nombre de coordonnées non nulles de v.

25 Choisir une suite d'indices $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$ tels que l'on puisse ramener le problème de $\Omega_{1,n}$ à $\Omega_{1,m}$ et appliquer le résultat de la question 20.

27 Scinder la somme obtenue en deux morceaux, de 1 à $n - t_n$ puis de $n - t_n + 1$ à $n - 1$ et majorer chaque partie. Choisir une suite (t_n) à croissance moins rapide que $(\sqrt{\ln n})$, par exemple $\big(\lfloor (\ln n)^{1/4} \rfloor\big)$.

A. Coefficients binomiaux

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier tel que $k+1 \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$. Le coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$ est non nul, ce qui permet de considérer

$$\frac{\dbinom{n}{k+1}}{\dbinom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} - 1$$

La fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $k+1$ est inférieur à $\lfloor n/2 \rfloor$ donc à $n/2$. On en déduit que

$$\frac{1}{k+1} \geqslant \frac{1}{n/2} = \frac{2}{n}$$

soit
$$\frac{\dbinom{n}{k+1}}{\dbinom{n}{k}} \geqslant (n+1)\frac{2}{n} - 1 = 2 + \frac{2}{n} - 1 = 1 + \frac{2}{n} > 1$$

d'où
$$\boxed{\text{L'application } k \mapsto \dbinom{n}{k} \text{ est croissante sur } \{0, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}.}$$

D'après le résultat précédent, on a

$$\forall\, k \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\} \qquad \binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Il suffit alors de remarquer que $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$ donc, si $k > \lfloor n/2 \rfloor$ alors

$$k > \frac{n}{2} \implies n-k < \frac{n}{2} \implies n-k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

car $n-k$ est entier. Par croissance de $k \mapsto \dbinom{n}{k}$ sur $[\![\, 0\,; \lfloor n/2 \rfloor \,]\!]$, on obtient

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \qquad \text{si } k > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

La majoration est aussi vraie lorsque $k > \lfloor n/2 \rfloor$. En conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad \binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$, on va faire l'étude selon la parité de n.

- Considérons le cas où n est pair. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Alors

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \frac{(2p)!}{p!^2}$$

On peut maintenant utiliser la formule de Stirling et écrire

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \frac{\sqrt{2\pi \times 2p}\left(\dfrac{2p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}}{2\pi p\left(\dfrac{p}{\mathrm{e}}\right)^{2p}} = \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}}$$

et finalement, lorsque n est pair,

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

- Voyons maintenant le cas n impair. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$; alors

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor = p \qquad \text{d'où} \qquad \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{2p+1}{p} = \frac{(2p+1)!}{p!(p+1)!}$$

On peut astucieusement réutiliser le travail précédent en remarquant que

$$\frac{(2p+1)!}{p!(p+1)!} = \frac{2p+1}{p+1} \cdot \frac{(2p)!}{p!^2} \sim 2 \cdot \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{2p+1}}{\sqrt{2p}}$$

Ainsi, en remarquant que $\sqrt{2p} \sim \sqrt{2p+1}$, il vient à nouveau

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{2p+1}}{\sqrt{2p+1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

En conclusion, $$\boxed{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{2^n}{\sqrt{n}}.}$$

On a $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} < 1$ puisque $2 < \pi$. L'équivalent précédent implique alors que

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leqslant \frac{2^n}{\sqrt{n}}}$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$, la propriété attendue se démontre aisément pour $k = 0$ puisque

$$\binom{n}{0} 2^{-1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 = n^0$$

Montrons par récurrence sur $k \in \{1, \ldots, n\}$ que la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \quad \binom{n}{k} 2^{k-1} \leqslant n^k$$

est vraie pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ est vraie car $\dbinom{n}{1} 2^0 = n \times 1 = n = n^1$.

- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: supposons que pour tout $k \in [\![1\,; n-1]\!]$ la propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors

$$\binom{n}{k+1} 2^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} 2^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{k-1} \times \frac{2(n-k)}{k+1}$$

Mines Maths 2 PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Duboc (ENS Lyon) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et Florian Metzger (docteur en mathématiques).

Cette épreuve étudie les fonctions harmoniques sur $\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert. Ce sont les fonctions f de régularité $\mathscr{C}^2$ dont le laplacien Δf est nul sur U :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- On commence par établir, de manière élémentaire, la décomposition en série de Fourier pour des fonctions harmoniques 2π-périodiques. Pour établir les résultats, on s'aide de polynômes trigonométriques appelés noyaux de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{D}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\,ikx}$$

- La deuxième partie utilise une analyse en coordonnées polaires pour prouver la propriété de la moyenne harmonique, c'est-à-dire que si une fonction f est harmonique sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, sa valeur en un point a est égale à la moyenne des valeurs prises par f sur tout cercle de rayon r et de centre a.
- On démontre ensuite une version affaiblie du principe du maximum, qui assure que si une fonction f harmonique sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum global, alors f est constante sur U. Ensuite, le problème de Dirichlet, qui consiste à calculer le prolongement harmonique d'une fonction sur la frontière de U, est résolu pour deux cas particuliers :
    - lorsque f s'annule sur la frontière, f s'annule en fait sur tout le domaine de définition ;
    - si f est sinusoïdale sur une partie de la frontière, on montre que la solution du problème de Dirichlet est unique.
- La quatrième partie définit un certain type de développement en série pour les fonctions harmoniques (le développement de Laurent) et l'utilise pour prouver qu'une fonction bornée harmonique sur tout $\mathbb{R}^2$ est nécessairement constante.
- Enfin, la partie précédente permet d'obtenir une preuve du théorème de D'Alembert–Gauss, qui affirme que tout polynome $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant admet au moins une racine complexe.

Ce sujet d'analyse permet de pratiquer intensivement les notions de continuité, de dérivation, d'intégration et de développements en série. La partie 3 demande une intuition géométrique mais permet de mieux comprendre le comportement général des fonctions harmoniques. Le reste du sujet met l'accent sur les techniques classiques de calcul et de résolution d'équations différentielles.

Indications

Partie I

2 Identifier une somme géométrique.

3 Utiliser une intégration par parties dérivant la fonction h et majorer les termes obtenus avec $\|h\|_\infty$ et $\|h'\|_\infty$, où $\|h\|_\infty = \sup\limits_{t\in[\,-\pi\,;\,\pi\,]} |h(t)|$.

5 Exprimer $g(t)$ sous la forme d'une intégrale à l'aide de la question 1, puis identifier $h_t(u)$ (question 2) et la prolonger en 0 en utilisant la régularité de g.

6 Majorer les termes obtenus après la deuxième intégration par parties à l'aide de $\|g'\|_\infty$ et $\|g''\|_\infty$.

7 Utiliser les questions 5 et 3, puis prouver la convergence des séries.

Partie II

8 Se rappeler que f est harmonique et que le théorème de Schwarz s'applique pour les dérivées partielles d'ordre 2.

9 Utiliser l'égalité de la question 8 et le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Pour $r = 0$, l'égalité à démontrer est $\mathrm{J}'(0) = 0$.

10 Intégrer les termes de l'équation de la question 9 entre 0 et x pour $x \in [\,0\,;\delta\,[$.

Partie III

11 Raisonner par l'absurde en supposant f non constante en un point situé à une distance r_0 de m_0. En invoquant la continuité de f en ce point, et en évaluant J sur le cercle de centre m_0 et de rayon r_0, montrer que J ne peut pas être constante.

12 Montrer que f s'annule en tout extremum. Pour cela raisonner géométriquement selon la position d'un extremum, à l'intérieur ou sur la frontière de K. Dans le premier cas, utiliser la question 11.

13 Se ramener, par séparation des variables, à la résolution de deux équations différentielles pour φ et ψ. Pour l'unicité, étudier la fonction définie par la différence entre deux solutions du problème.

Partie IV

14 Intégrer l'égalité de la question 8.

17 Identifier $v_n(r)$ avec les coefficients de la question 7.

18 Utiliser la question 16 et l'expression de $v_n(r)$ pour montrer que les coefficients a_n sont tous nuls sauf a_0.

Partie V

21 Effectuer une comparaison asymptotique de $\mathrm{P}(z)$ avec son monôme de plus haut degré.

22 Appliquer le résultat de la question 18 à la fonction g.

I. Noyau de Dirichlet

$\boxed{1}$ Pour $k \in \mathbb{Z}^*$, puisque $t \longmapsto \mathrm{e}^{\,ikt}$ est 2π-périodique, remarquons que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,ikt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\,ikt}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Pour $k = 0$, cette intégrale vaut $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\,ikt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,ikt}\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi}$$

$\boxed{2}$ Considérons $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t} \neq 1$, l'expression de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} (\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})^k \\
&= \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt} \sum_{j=0}^{2n} (\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})^j && \text{(car } j = k+n\text{)} \\
\mathrm{D}_n(t) &= \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt}\, \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t(2n+1)} - 1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t} - 1}
\end{aligned}$$

En mettant en facteur la demi-somme des arguments, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_n(t) &= \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt}\, \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n+1/2)t}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t/2}}\, \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n+1/2)t} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}(n+1/2)t}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t/2} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}t/2}} \\
&= 1\, \frac{2\mathrm{i}\sin((n+1/2)t)}{2\mathrm{i}\sin(t/2)} \\
\mathrm{D}_n(t) &= \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}
\end{aligned}$$

donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z} \qquad \mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}}$$

$\boxed{3}$ Soit $\alpha > 0$. Les fonctions h et $x \longmapsto \cos(\alpha x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$, on réalise l'intégration par parties suivante :

$$\mathrm{I}_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(u)\sin(\alpha u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha}\left[-h(u)\cos(\alpha u)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha u) h'(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme h et h' sont continues sur le segment $[-\pi\,;\pi]$ donc bornées, il vient :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}_\alpha| &\leqslant \frac{1}{\alpha}\left|[-h(u)\cos(\alpha u)]_{-\pi}^{\pi}\right| + \frac{1}{\alpha}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha u)h'(u)\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\,2\max_{[-\pi\,;\pi]}|h| + \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(\alpha u)h'(u)|\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\,2\max_{[-\pi\,;\pi]}|h| + \frac{1}{\alpha}\,2\pi\max_{[-\pi\,;\pi]}|h'| \\
|\mathrm{I}_\alpha| &\leqslant \frac{1}{\alpha}\left(2\max_{[-\pi\,;\pi]}|h| + 2\pi\max_{[-\pi\,;\pi]}|h'|\right)
\end{aligned}$$

La quantité $|\mathrm{I}_\alpha|$ est donc majorée par le produit de $1/\alpha$ (tendant vers 0 lorsque α tend vers $+\infty$) et d'une quantité bornée. Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}\mathrm{I}_\alpha = 0}$$

> Cette question démontre le lemme de Riemann-Lebesgue
>
> $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$
>
> pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Ce résultat est néanmoins valable pour toute fonction h intégrable sur $]-\pi\,;\pi[$.

4 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{k=-n}^{n}c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt}$$

Pour tout $k\in[\![-n\,;n]\!]$, l'application $x\longmapsto g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt}$ est continue sur $[-\pi\,;\pi]$. De plus, la somme est finie. En échangeant somme et intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n}c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n}g(x)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}k(t-x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,\mathrm{D}_n(t-x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Par le changement de variable affine non constant donc licite $u=t-x$, il vient :

$$\sum_{k=-n}^{n}c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} = \frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi}g(t-u)\,\mathrm{D}_n(u)(-\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi}g(t-u)\,\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Puisque les fonctions g et D_n sont 2π-périodiques, cette dernière intégrale vaut aussi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t-u)\,\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u$$

d'où $$\boxed{\forall(n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}\qquad \sum_{k=-n}^{n}c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t-u)\,\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u}$$

Mines Informatique MP-PC-PSI 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Julien Fleck (professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Guillaume Batog (professeur en CPGE).

Le sujet s'inspire d'un problème physique réel (mesures de houle en divers points du globe) et se découpe en cinq grandes parties qui visent chacune à balayer une partie du programme d'informatique commune.

- La première partie s'intéresse au stockage des données récoltées par les instruments de mesure. Elle permet de vérifier que les candidats ont des notions concernant la place occupée en mémoire par un caractère et sur la lecture d'un fichier de données.
- La deuxième partie permet de rentrer plus avant dans le traitement des données en demandant d'implémenter quelques algorithmes simples qui sont au programme de prépa : calcul d'une moyenne, intégration à partir d'une liste de valeurs, recherche d'une particularité dans une liste, calcul de propriétés à partir des spécifications de l'énoncé, etc.
- La troisième partie, après l'implémentation d'une recherche de maximum sur une liste de listes, s'intéresse plus particulièrement au programme de deuxième année avec une petite incursion dans les algorithmes de tri, demandant par exemple de compléter une implémentation préremplie du tri rapide, puis d'écrire entièrement une implémentation d'un tri par insertion. Une analyse de programme est aussi demandée pour y détecter un calcul inefficace et demander de l'améliorer.
- La quatrième partie concerne les bases de données. Il s'agit de survoler rapidement toute une page de présentation de la base de données considérée pour pouvoir écrire les trois requêtes SQL demandées. Là encore, il ne s'agit pas de comprendre *in extenso* tous les tenants et les aboutissants de la base, mais d'identifier les points clés afin de répondre rapidement à la question posée.
- La cinquième partie présente et demande d'implémenter l'algorithme de Cooley-Tukey de transformée de Fourier discrète en imposant une approche récursive (au programme de seconde année). C'est néanmoins tout à fait abordable en première année.

Le sujet est globalement équilibré. Il comporte de nombreuses questions simples de programmation et explore l'ensemble du programme des deux années (avec notamment des questions sur les tris et une implémentation récursive pour le programme de seconde année) mais peut être abordé en grande partie en première année.

Comme chaque année, l'épreuve des Mines nécessite d'être efficace vu sa durée limitée (seulement 1h30). Les questions ne sont pas particulièrement difficiles et il faut savoir aller à l'essentiel pour pouvoir toutes les traiter, quitte à en laisser certaines de côté si elles semblent demander trop de temps de réflexion.

Indications

Partie I

4 L'ouverture d'un descripteur de fichier se fait à l'aide de la commande `open`. La lecture des lignes dans un tableau se fait à l'aide de `readlines`. Ne pas oublier la conversion en flottant à l'aide de la fonction `float` qui gère naturellement les signes et les caractères de fin de ligne.

Partie II

7 La méthode des trapèzes sur un découpage $(x_i)_{i\in[\![0\,;\,n]\!]}$ en n intervalles revient à approximer

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right) \times (x_{i+1}-x_i)$$

La moyenne d'une fonction η sur un intervalle de temps t_{tot} se définit comme

$$\langle\eta(t)\rangle = \frac{1}{t_{\text{tot}}}\int_0^{t_{\text{tot}}} \eta(t)\,\mathrm{d}t$$

8 Penser à calculer la moyenne en dehors de la boucle pour éviter de refaire de nombreuses fois le même calcul.

9 Le calcul de la moyenne est déjà de complexité linéaire : il faut que celle-ci soit fournie en argument de la fonction si on veut espérer atteindre une complexité en $\mathrm{O}(1)$ dans le meilleur des cas.

10 Attention, la définition des indices qu'il faut stocker dans la liste des successeurs n'est plus celle des questions 8 et 9 : il y a un décalage d'une position supplémentaire.

11 Penser à utiliser la fonction précédente pour calculer la liste des successeurs et utiliser le *slicing* pour découper en tranches correspondant aux vagues.

12 Utiliser de même la fonction définie à la question précédente pour obtenir les différentes vagues. Attention au fait que la hauteur maximale se calcule à cheval sur deux vagues (maximum de l'une auquel on soustrait le minimum de la suivante). Attention aussi au fait qu'il faut calculer le maximum précédant le premier PND.

Partie III

13 La structure particulière de la liste passée en argument impose d'implémenter la recherche de maximum à la main.

14 Ne pas essayer de comprendre ce que fait le code en détail, il suffit de trouver « par homogénéité » la forme attendue pour le pivot.

16 Penser à la manière dont on trie ses cartes en propageant la place libre jusqu'à atteindre le bon emplacement.

17 Recalculer de nombreuses fois la même chose ne sert à rien : penser à calculer la moyenne une unique fois avant de rentrer dans la boucle.

Partie IV

19 La deuxième requête peut se faire en comptant le nombre d'apparition d'une bouée dans la table `Tempete`, ledit nombre devant être égal à 0 si la bouée n'a pas connu de tempête. On peut aussi utiliser une différence ensembliste à l'aide de `EXCEPT` ou `MINUS`.

La troisième requête se fait assez simplement avec une jointure et une unique fonction d'agrégation.

Partie V

20 On peut estimer la complexité en procédant d'une manière proche du tri fusion : on a $k = \log_2(\mathrm{N})$ étages de divisions par 2 avec une complexité linéaire à chaque étage.

I. Stockage interne des données

1 Hormis la première ligne qu'on demande d'ignorer, chaque ligne est constituée de 8 caractères (5 chiffres, un signe, un point et le caractère de fin de ligne comme le signale l'énoncé) donc occupe 8 octets. 20 minutes correspondent à 1 200 s. En outre, comme il y a deux mesures par seconde, cela correspond à 2 400 mesures au total, soit une taille de $8 \times 2\,400 = 19\,200$ octets = 19,2 ko.

2 La campagne de mesure fait état d'un fichier récolté toutes les demi-heures pendant 15 jours. Il y a donc $15 \times 24 \times 2 = 720$ fois les informations précédentes collectées, ce qui représente donc une taille totale de 13 824 ko, soit 13,8 Mo.

Une carte mémoire de 1 Go est largement suffisante.

3 Ôter un chiffre revient à passer chaque ligne de 8 à seulement 7 octets, d'où une réduction de $1/8 \approx 12\%$ de la taille totale du fichier.

4 La lecture d'un fichier texte peut se faire de la manière suivante

```
with open('donnees.txt') as f:# Ouverture du descripteur de fichier
    L = f.readlines()         # Lecture effective du fichier
    liste_niveaux = []        # Définition du conteneur
    for i in range(1,len(L)): # On saute la première ligne de texte
        liste_niveaux.append(float(L[i])) # et on convertit en flottants
```

Bien sûr, on peut aussi demander à Numpy de faire tout le travail à notre place

```
import numpy as np # Importation de la bibliothèque
# On saute la première ligne et on convertit au vol en liste car np.loadtxt
# renvoie normalement un np.array
liste_niveaux = list(np.loadtxt('donnees.txt',skiprows=1))
```

La lecture de données numériques dans un fichier est tellement utile en pratique (par exemple en TIPE) qu'il faut que ce soit maîtrisé par les candidats. Ici, l'usage de la fonction `float` n'est pas rappelé, mais on peut partir du principe qu'elle a été conçue de manière à ce que tous les nombres représentés de manière « usuelle » puissent se convertir facilement depuis une représentation en chaîne de caractères. En particulier, le `+` n'est pas gênant en début de nombre, ni le caractère de fin de ligne (ou tout autre espace qui pourrait être présent tout à droite ou tout à gauche de la chaîne de caractères). En revanche, `float` n'est pas capable d'effectuer des opérations de calcul comme « `float("2+2")` », il ne faut tout de même pas trop lui en demander.

La construction avec `with` permet de s'assurer que le descripteur de fichier sera fermé quoi qu'il arrive et que le fichier ne soit pas corrompu (voir par exemple `https://tinyurl.com/with-open-python`), mais la structure suivante sera acceptable de la même manière.

```
f = open('donnees.txt')       # Ouverture du descripteur de fichier
L = f.readlines()             # Lecture effective du fichier
liste_niveaux = []            # Définition du conteneur
for i in range(1,len(L)):     # On saute la première ligne de texte
    liste_niveaux.append(float(L[i])) # et on convertit en flottants
f.close()                     # Fermeture du descripteur de fichier
```

X/ENS Maths PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Philippe Bouafia (professeur à l'ENSEA) ; il a été relu par Hervé Diet (professeur agrégé) et Guillaume Batog (professeur en CPGE).

Dans ce problème, on étudie la différence maximale, notée $\mathrm{M(A)}$, entre le nombre de 1 et de -1 que l'on peut obtenir en partant d'une matrice carrée initiale A de dimension $n \times n$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$, et en multipliant certaines de ses lignes et colonnes par -1.

- La première partie vise à se familiariser avec les objets du problème, par exemple en étudiant le cas $n = 2$, qui peut se traiter « à la main ». La fin de cette partie étudie sous quelles conditions il est possible d'éliminer tous les -1 d'une matrice A de taille quelconque en multipliant certaines lignes et colonnes par -1.
- Dans les deuxième et troisième parties, on s'intéresse à l'évolution asymptotique de la quantité $\underline{\mathrm{M}}(n) = \operatorname*{Min}_{\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\{-1,1\})} \mathrm{M(A)}$. De manière assez surprenante, on utilise des méthodes probabilistes pour résoudre ce problème de nature purement combinatoire.
- La quatrième partie est indépendante du reste du problème : on y démontre la célébrissime formule de Stirling, qui donne un équivalent de $n\,!$ lorsque $n \to +\infty$, par des méthodes qui couvrent à peu près le programme d'analyse : formules intégrales, calcul différentiel à plusieurs variables, théorème de convergence dominée, etc.
- Enfin, la dernière partie est moins guidée. Elle reprend essentiellement toutes les méthodes des parties précédentes pour étudier le problème dual de l'écart minimal entre le nombre de 1 et de -1 que l'on peut obtenir en multipliant certaines lignes ou colonnes de A par -1.

Ce problème fait intervenir des parties extrêmement variées du programme : combinatoire, probabilités, analyse, algèbre linéaire, et même, de manière implicite, des espaces vectoriels normés. Il contient nombre de questions astucieuses (sans être infaisables) qui le rendent formateur.

Indications

Partie I

I.3 Montrer que DY parcourt $\{-1,1\}^n$ lorsque Y parcourt $\{-1,1\}^n$.

I.4 Pour le calcul de S(A), essayer de se ramener au cas des matrices I et J par des opérations du type « multiplication d'une ligne ou d'une colonne par ± 1 ».

I.5 Montrer les équivalences (a) $\iff$ (b) et (b) $\iff$ (c).

I.6 Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\{-1,1\})$ de rang 1, compter le nombre de couples $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tels que $\mathrm{A} = \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{Y}$.

Partie II

II.2 Appliquer l'inégalité de Markov.

II.3 Appliquer la question II.1, puis le résultat de la question II.2 pour une valeur judicieusement choisie de λ.

II.5 Exprimer $\{\mathrm{M(C)} \geqslant tn^{3/2}\}$ comme une union d'événements dont on pourra majorer la probabilité grâce à la question II.3.

II.6 Si un événement est de probabilité non nulle, alors il est non vide.

Partie III

III.2 Utiliser une loi binomiale.

III.3.a Montrer que $(n-2k)\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k} - n\dbinom{n-1}{k-1}$.

III.3.b Reprendre le résultat de la question III.2 et distinguer les k selon que $n-2k$ soit positif ou négatif.

III.4.a Revenir à la définition de l'espérance pour calculer $\mathrm{E}(g_\mathrm{A}(\mathrm{Z}))$.

Partie IV

IV.3.b Montrer que la fonction partielle $t \mapsto f(t,x)$ est décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ en considérant sa dérivée.

IV.4 Déterminer la limite de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

Partie V

V.1 Remarquer que, si u et v sont deux réels dont l'un est positif et l'autre négatif, alors $|u+v| \leqslant \max(|u|\,,|v|)$.

Montrer que, pour tout $(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{R}^n$, on peut construire pas à pas une suite finie $x_1,\ldots,x_n \in \{-1,1\}$ telle que $\left|\sum\limits_{i=1}^n x_i z_i\right| \leqslant \max(|z_1|\,,\ldots,|z_n|)$.

V.2 Introduire $\varepsilon > 0$ et une variable aléatoire Z à valeurs dans $\{-1,1\}^n$ comme dans la question III.2, puis montrer que

$$\mathrm{P}\left(\operatorname*{Max}_{i\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\mathrm{Z}_j\right| \leqslant \sqrt{2n\ln(2n)}+\varepsilon\right) > 0$$

en s'inspirant des méthodes de la deuxième partie.

Partie I

Donnons-nous une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\{-1,1\})$ ainsi que deux vecteurs X et Y dans $\{-1,1\}^n$. Notons que

$$^t\mathrm{X}\,\mathrm{AY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{i,j}$$

est la somme des éléments de la matrice $(x_i y_j a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, obtenue à partir de A en multipliant pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ la i^{e} ligne par x_i, et pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$ la j^{e} colonne par y_j.

Pour se forger une intuition, on peut penser à l'image suivante. Plutôt qu'à une matrice A à coefficients dans $\{-1,1\}$, pensons à un damier de taille $n\times n$ rempli de jetons bifaces noirs et blancs, et dont les faces visibles sont initialement données par la matrice A (1 pour blanc et -1 pour noir). À chaque tour, vous avez le droit de retourner tous les jetons d'une ligne ou bien d'une colonne, comme au jeu *Othello*. La quantité $^t\mathrm{X}\,\mathrm{AY}$ représente alors l'avance qu'ont les blancs par rapport aux noirs, si l'on a retourné toutes les lignes i pour lesquelles $x_i = -1$, et toutes les colonnes j pour lesquelles $y_j = -1$.

Si l'on poursuit cette image, la quantité M(A) représente l'avance maximale que peuvent atteindre les blancs en jouant de manière optimale. Une question naturelle se pose : est-il possible d'atteindre une configuration sans jetons noirs ? Autrement dit, peut-on avoir $\mathrm{M(A)} = n^2$? Cette question sera résolue à la fin de la première partie.

I.1 Un élément de $\mathscr{M}_n(\{-1,1\})$ est déterminé par ses n^2 coefficients pris dans l'ensemble $\{-1,1\}$ de cardinal 2 d'où

$$\boxed{\mathrm{Card}\ \mathscr{M}_n(\{-1,1\}) = 2^{n^2}}$$

De manière plus formelle, la phrase « un élément de $\mathscr{M}_n(\{-1,1\})$ est déterminé par ses n^2 coefficients pris dans $\{-1,1\}$ » signifie que l'application

$$\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\{-1,1\}) & \longrightarrow & \{-1,1\}^{n^2} \\ (a_{i,j}) & \longmapsto & (\underbrace{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots}_{\text{ligne 1}}, \underbrace{a_{2,1}, a_{2,2}, \dots}_{\text{ligne 2}}, \dots) \end{array}\right.$$

est bijective. On en déduit que les ensembles de départ $\mathscr{M}_n(\{-1,1\})$ et d'arrivée $\{-1,1\}^{n^2}$ ont le même cardinal, et on conclut en notant que $\mathrm{Card}\,\{-1,1\}^{n^2} = (\mathrm{Card}\,\{-1,1\})^{n^2} = 2^{n^2}$.

Un tel niveau de précision n'est cependant pas exigé. En combinatoire, l'usage est d'adopter un style de rédaction plus informel que dans les autres branches des mathématiques.

Par ailleurs, la matrice nulle n'appartient pas à $\mathscr{M}_n(\{-1,1\})$, donc

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{M}_n(\{-1,1\}) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

I.2 Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\{-1,1\})$ et $k \in \mathrm{S(A)}$. Par définition de S(A), il existe des vecteurs $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \{-1,1\}^n$ tels que

$$k = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j$$

Ainsi k est un entier relatif car c'est une somme de 1 et -1. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|k| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_i|\,|y_j| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = n^2$$

Les entiers $a_{i,j}x_iy_j$ valent -1 ou 1. En particulier, ils sont impairs, de sorte que k s'écrit comme une somme de n^2 entiers impairs. Il en découle que k a la même parité que n^2, donc que n. En particulier, si n est pair, alors $1 \notin \mathrm{S(A)}$, et si n est impair, alors $0 \notin \mathrm{S(A)}$. En conclusion,

$$\boxed{\text{S(A) est strictement inclus dans } \{-n^2, \dots, n^2\}.}$$

Montrons à présent que S(A) est symétrique. Soit $k \in \mathrm{S(A)}$. Il existe des vecteurs $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \{-1,1\}^n$ tels que $k = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AY}$. Comme l'ensemble $\{-1,1\}$ est stable par multiplication par -1, le vecteur $-\mathrm{Y}$ appartient également à $\{-1,1\}^n$. Ceci implique que $-k = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{A}(-\mathrm{Y}) \in \mathrm{S(A)}$. Réciproquement, dans le cas où $-k \in \mathrm{S(A)}$, on déduit de ce qui précède que $k = -(-k) \in \mathrm{S(A)}$.

$$\boxed{\text{Un entier } k \text{ est dans S(A) si et seulement si } -k \text{ est dans S(A).}}$$

I.3 Notons que l'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \{-1,1\}^n & \longrightarrow \{-1,1\}^n \\ \mathrm{Y} = (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto \mathrm{DY} = (d_{1,1}y_1, \dots, d_{n,n}y_n) \end{cases}$$

est bien définie. Les coefficients diagonaux de D sont tous dans $\{-1,1\}$ et, comme $1^2 = (-1)^2 = 1$, on en déduit que D^2 est la matrice identité d'où $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$. En particulier, φ est une bijection sur $\{-1,1\}^n$. De la même manière, on montre que l'application $\psi\colon \mathrm{X} \mapsto {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{X}$ réalise une bijection sur $\{-1,1\}^n$. Il vient que

$$\begin{aligned} k \in \mathrm{S(B)} &\iff \exists \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \{-1,1\}^n \quad k = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{CADY} \\ &\iff \exists \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \{-1,1\}^n \quad k = {}^t\left({}^t\mathrm{C}\,\mathrm{X}\right)\mathrm{A}\,(\mathrm{DY}) \\ &\iff \exists \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \{-1,1\}^n \quad k = {}^t\psi(\mathrm{X})\,\mathrm{A}\varphi(\mathrm{Y}) \\ &\iff \exists \mathrm{X}', \mathrm{Y}' \in \{-1,1\}^n \quad k = {}^t\mathrm{X}'\,\mathrm{AY}' \qquad (\psi \text{ et } \varphi \text{ bijectives}) \\ k \in \mathrm{S(B)} &\iff k \in \mathrm{S(A)} \end{aligned}$$

car ψ et φ sont des bijections sur $\{-1,1\}^n$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{S(A)} = \mathrm{S(B)}}$$

I.4 Introduisons deux vecteurs $\mathrm{X} = (x_1, x_2)$ et $\mathrm{Y} = (y_1, y_2)$ de $\{-1,1\}^2$ et calculons

$${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{IY} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

Or la somme $x_1 + x_2$ ne peut prendre comme valeurs que -2, 0 ou 2, et il en va de même pour la somme $y_1 + y_2$. Cela implique que $\mathrm{S(I)} \subset \{-4, 0, 4\}$. Montrons que cette inclusion est en réalité une égalité. L'ensemble S(I) étant symétrique d'après la question I.2, il suffit pour cela de montrer que $0 \in \mathrm{S(I)}$ et $4 \in \mathrm{S(I)}$, ce qui se fait par des choix judicieux de vecteurs X et Y :

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad 4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{S(I)} = \{-4, 0, 4\}}$$

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Emma Kerinec (ENS Lyon) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

Ce sujet regroupe une collection de requêtes SQL élémentaires et leur traduction en algèbre relationnelle, qu'il faut implémenter en Python. Aucune connaissance théorique spécifique n'est requise ; seule la maîtrise primaire de la syntaxe SQL est nécessaire. Le sujet est idéal pour s'entraîner sur des requêtes SQL simples, ainsi que sur les principes basiques des algorithmes et leur implémentation en Python. La première partie doit être abordée avant les deux suivantes, lesquelles peuvent en revanche être traitées indépendamment l'une de l'autre.

- La première partie introduit l'utilisation des listes et des tables afin de définir des fonctions servant de briques de base pour les parties suivantes, notamment la jointure de tables et la sélection d'éléments selon différents critères.
- La deuxième partie met en évidence le lien entre ces fonctions et les principales requêtes SQL ; il faut alors se servir de la partie précédente pour implémenter quelques requêtes SQL simples.
- La dernière partie propose d'améliorer les fonctions définies dans la première partie en exploitant des propriétés de tri concernant les tables ou grâce à l'introduction de dictionnaires.

Si ce sujet est d'une difficulté moyenne, il a sans doute déconcerté les candidats ayant fait l'impasse sur le langage SQL. Il introduit efficacement les concepts utilisés, notamment la structure hors-programme de dictionnaire, ainsi que tous les outils associés auxquels doivent se restreindre les candidats. Malgré l'évocation de tris dans la dernière partie, ce sujet est abordable en fin de première année.

Indications

Partie I

I.5 Observer que les enregistrements d'une table sont indépendants.

I.6 Parcourir les deux tables et utiliser la concaténation.

I.7 Parcourir les deux tables et comparer les bons attributs, ne pas oublier de supprimer l'attribut associé au second indice.

I.9 Comparer chaque enregistrement de la table à tous ceux déjà retenus dans le résultat.

Partie II

II.1 Utiliser la fonction `SelectionConstante` définie dans la partie précédente.

II.2 L'opération demandée est le produit cartésien de `Trajet` et `Véhicule`.

II.3 On peut enchaîner les fonctions élémentaires.

II.4 Attention aux indices des colonnes après jointure.

II.5 Il vaut mieux faire une double jointure suivie d'une unique sélection.

II.6 Penser à réutiliser le résultat précédent, sous forme de jointure.

Partie III

III.1 Parcourir la table en comparant les enregistrements consécutifs.

III.2 Quel est l'algorithme classique de recherche sur les listes triées ?

III.3 Parcourir en parallèle les deux tables et les synchroniser.

I. Implémentation des opérateurs de l'algèbre relationnelle en Python

I.1 On parcourt tous les enregistrements de `table`, et on ajoute dans le résultat ceux dont la valeur pour l'indice `indice` vaut `constante`.

```
def SelectionConstante(table, indice, constante):
    resultat = []
    for enr in table:
        if enr[indice] == constante:
            resultat.append(enr)
    return resultat
```

I.2 Dans la fonction précédente, il n'y a pas d'opération coûteuse en dehors de la boucle `for`. Celle-ci s'exécute `len`(`table`) fois et on effectue deux opérations élémentaires au plus à chaque étape. Ainsi,

La complexité de la fonction `SelectionConstante` est en O(`len`(`table`)).

I.3 Parcourons tous les enregistrements de la table `table` et ajoutons dans le résultat ceux dont la valeur pour l'indice `indice1` est égale à celle pour l'indice `indice2`.

```
def SelectionEgalite(table, indice1, indice2):
    resultat = []
    for enr in table:
        if enr[indice1] == enr[indice2]:
            resultat.append(enr)
    return resultat
```

I.4 Il suffit de parcourir la liste `listeIndices` en créant un nouvel enregistrement auquel on ajoute les valeurs de `enregistrement` pour les indices souhaités, donnés dans `listeIndices`.

```
def ProjectionEnregistrement(enregistrement, listeIndices):
    resultat = []
    for indice in listeIndices:
        resultat.append(enregistrement[indice])
    return resultat
```

I.5 Il suffit d'appliquer la fonction précédente à tous les éléments de `table`, car ceux-ci sont indépendants, et de rassembler les nouveaux enregistrements dans une nouvelle table que l'on renvoie en fin de programme.

```
def ProjectionTable(table, listeIndices):
    resultat = []
    for enr in table:
        proj = ProjectionEnregistrement(enr, listeIndices)
        resultat.append(proj)
    return resultat
```

I.6 L'utilisation de deux boucles `for` permet de créer toutes les concaténations d'un élément de `table1` et d'un élément de `table2`, qui sont successivement ajoutés à une nouvelle table.

```
def ProduitCartesien(table1, table2):
    resultat = []
    for enr1 in table1:
        for enr2 in table2:
            resultat.append(enr1 + enr2)
    return resultat
```

I.7 Comme dans la question précédente, on parcourt les couples d'enregistrements à l'aide de deux boucles. Si les attributs de ces deux enregistrements coïncident, on concatène au premier enregistrement une copie du second dans laquelle seul l'attribut d'indice i_2 n'a pas été recopié. Le résultat de cette concaténation est ensuite ajouté dans la nouvelle table.

```
def JointEnregistrements(enr1, enr2, indice2):
    return (enr1 + enr2[0:indice2] + enr2[indice2 + 1:])
```

> L'utilisation d'une fonction annexe n'est pas obligatoire.

```
def Jointure(table1, table2, indice1, indice2):
    resultat = []
    for enr1 in table1:
        for enr2 in table2:
            if enr1[indice1] == enr2[indice2]:
                jointure = JointEnregistrements(enr1, enr2, indice2)
                resultat.append(jointure)
    return resultat
```

> On peut aussi utiliser une boucle `for` pour la jointure :
>
> ```
> def JointEnregistrements(enr1, enr2, indice2):
>     resultat = enr1[:]
>     for i in range(len(enr2)):
>         if i != indice2:
>             resultat.append(enr2[i])
>     return resultat
> ```
>
> L'astuce `enr1[:]` sert à créer une copie de `enr1` ; il ne faudrait pas que les modifications apportées à `resultat` modifient également l'argument `enr1`.

I.8 La fonction `Jointure` fait intervenir deux boucles. La première boucle `for` s'exécute `len(table1)` fois. Pour chaque étape, une nouvelle boucle `for` s'exécute `len(table2)` fois, en effectuant une lecture de liste et une copie d'un enregistrement de `table2`. Finalement,

La complexité de la fonction `Jointure` est en $\mathrm{O}(\texttt{len(table1)} \cdot \texttt{len(table2)} \cdot \texttt{len(table2[0])})$.