

Claude **Aslangul**

# Des mathématiques pour les sciences 2

Corrigés détaillés et commentés  
des exercices et problèmes

**EXERCICES CORRIGÉS**

**LMD**

Licence et Master :  
physique, chimie, SVT,  
économie



# **Des mathématiques pour les sciences 2**

**Corrigés détaillés et commentés  
des exercices et problèmes**

## **Mathématiques**

- ASLANGUL C., *Des mathématiques pour les sciences. Concepts, méthodes et techniques pour la modélisation*
- BOGAERT P., *Probabilités pour scientifiques et ingénieurs. Introduction au calcul des probabilités*
- COTTET-EMARD F., *Analyse*
- COTTET-EMARD F., *Analyse 2. Calcul différentiel, intégrales multiples, séries de Fourier*
- COTTET-EMARD F., *Calcul différentiel et intégral. Exercices et problèmes corrigés*
- COTTET-EMARD F., *Algèbre linéaire et bilinéaire*
- DUPONT P., *Exercices corrigés de mathématiques. Tome 1. 3<sup>e</sup> éd.*
- DUPONT P., *Exercices corrigés de mathématiques. Tome 2. 3<sup>e</sup> éd.*
- ETIENNE D., *Exercices corrigés d'algèbre linéaire. Tome 1*
- ETIENNE D., *Exercices corrigés d'algèbre linéaire. Tome 2*
- MARCHAND M., *Outils mathématiques pour l'informaticien. Mathématiques discrètes. 2<sup>e</sup> éd.*

## **Physique**

- ASLANGUL C., *Mécanique quantique 1. Fondements et premières applications*
- ASLANGUL C., *Mécanique quantique 2. Développements et applications à basse énergie. 3<sup>e</sup> éd.*
- ASLANGUL C., *Mécanique quantique 3. Corrigés détaillés et commentés des exercices et des problèmes*
- BÉCHERRAWY T., *Optique géométrique*
- BIÉMONT É., *Spectroscopie atomique. Instrumentation et structures atomiques*
- BIÉMONT É., *Spectroscopie moléculaire. Structures moléculaires et analyse spectrale*
- CHAMPEAU R.-J., CARPENTIER R., LORGERÉ I., *Ondes lumineuses. Propagation, optique de Fourier, cohérence*
- MAYET F., *Physique nucléaire appliquée*
- TAILLET R., *Optique physique. Propagation de la lumière*
- WATSKY A., *Thermodynamique macroscopique*

Claude Aslangul

# Des mathématiques pour les sciences 2

Corrigés détaillés et commentés  
des exercices et problèmes

**EXERCICES CORRIGÉS**

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **[www.deboeck.com](http://www.deboeck.com)**

© DB SUP s.a., 2013

Fond Jean Pâques, 4 – B-1348 Louvain-la-Neuve

2<sup>e</sup> tirage 2015

Tous droits réservés pour tous pays.

Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :

Bibliothèque nationale, Paris : septembre 2013

Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2013/0074/156

ISBN 978-2-8041-8172-7

*À Mina et Julien*

*À Laurence*





*“C’est avec la logique que nous prouvons  
et avec l’intuition que nous trouvons”*

(Henri POINCARÉ)

## Préambule

*Ce livre (actualisé) présente les corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes de l’ouvrage Des mathématiques pour les sciences (édition 2011), dont il reprend strictement la structure en chapitres ; le corrigé 12.3 correspond ainsi au troisième problème du chapitre 12, figurant dans le livre de cours dans la section 12.6 et donc numéroté 12.6.3.*

*L’esprit est aussi le même que celui du livre de cours : rigueur certes, mais mesurée et allégée par des hypothèses dont on pourrait s’affranchir au prix d’un effort hors de propos dans le contexte considéré, commentaires des résultats au risque de ce que certains pourront considérer comme des redondances, petites échappées vers des questions qui ne sont pas annexes même si elles peuvent sembler éloignées des questions en discussion.*

*Outre les commentaires indispensables pour que le corrigé ne se réduise pas en effet à une suite d’opérations algébriques, celui-ci inclut parfois un ou plusieurs compléments illustrant la question examinée, ou proposant des extensions susceptibles d’éveiller la curiosité du lecteur, quand ce ne sont pas des questions, livrées en vrac, dont l’auteur ne connaît pas la réponse.*

*Les énoncés de l’édition 2011 sont repris in extenso (dans une police différente) avant chaque solution, auxquels ont été ajoutés des problèmes ou des questions auparavant absents, signalés par le symbole  $\textcircled{S}$ . Si ces insertions ont fatalement provoqué ici et là une incrémentation de la numérotation, le lecteur ne devrait pas en être troublé. Par ailleurs, il est arrivé en de rares circonstances que la rédaction détaillée du corrigé suggère des modifications de l’énoncé, qui ont été rapportées dans le rappel de celui-ci en début de chaque problème. Notamment, des questions intermédiaires ont été parfois insérées lorsque la résolution s’est révélée plus délicate ou plus laborieuse que prévu.*

*Il est fait souvent référence au livre de cours, notamment lorsqu’il s’agit d’exploiter un résultat précis, le renvoi à une équation ou une égalité se faisant sous alors la forme<sup>1</sup> (C-UV.XYZ). Si cette disposition technique a été adoptée pour la commodité du lecteur, elle ne doit en aucune façon le dissuader de la nécessité de consulter les grands classiques que sont les ouvrages de Titchmarsh [1], de Whittaker et Watson [2], de Bass [3], de Feller [4], [5], de Hamermesh [6], de Tinkham [7] et d’Arnold [8], pour ne citer que ceux inspirés d’instinct à l’auteur. Leur lecture (et relecture) est une source inépuisable d’enrichissement et d’approfondissement.*

Qu’il me soit permis, une fois encore, d’exprimer mes plus vifs remerciements à Francis Germain, collaborateur irremplaçable par l’acuité de son esprit, la finesse de ses remarques et la pertinence de ses suggestions.

D’une page à l’autre, son aide fut aussi précieuse que son affectueuse présence.

---

<sup>1</sup>La référence est relative à la 1<sup>ère</sup> édition du livre de cours (2011).



# Table des Matières

<b>1 Algèbre linéaire</b>	<b>1</b>
1.1 Étude de lois de composition . . . . .	1
1.2 Structures . . . . .	3
1.3 Sous-espace vectoriel . . . . .	4
1.4 Indépendance linéaire . . . . .	5
1.5 Espace vectoriel des solutions d'une récurrence d'ordre 2 . . . . .	7
1.6 Opérations sur les matrices . . . . .	9
1.7 Diagonalisation . . . . .	17
1.8 Changement de base . . . . .	20
1.9 Calcul d'un déterminant . . . . .	25
1.10 Déterminant de van der Monde . . . . .	26
1.11 Déterminant de Gram - Schmidt . . . . .	28
1.12 Équation d'Abel . . . . .	29
1.13 Équation de Fredholm . . . . .	31
1.14 Équation de Volterra . . . . .	37
<b>2 Rappels d'Analyse réelle</b>	<b>41</b>
2.1 Développements limités . . . . .	41
2.2 Formule de sommation (sommatoire) d'Abel . . . . .	53

2.3	Un argument d'homogénéité (Cavalieri, 1653)	55
2.4	Développements en série entière	57
2.5	Une double inégalité utile	59
2.6	La relation fonctionnelle caractéristique de la fonction logarithme	61
2.7	Inégalité de Jensen	61
2.8	Suites	64
2.9	Intégrales impropres	76
2.10	Séries numériques	84
2.11	À propos de la série harmonique	96
2.12	Une série exotique	99
2.13	Accélérateur de convergence (transformation d'Euler)	103
2.14	Série d'exponentielles	105
2.15	Séries de fonctions	106
2.16	Séries entières	114
2.17	Produits infinis	116
2.18	Fonctions définies par une intégrale	122
<b>3</b>	<b>Fonctions d'une variable complexe</b>	<b>131</b>
3.1	Opérations élémentaires sur les complexes	131
3.2	Interprétation géométrique des complexes	146
3.3	Un isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et un ensemble de matrices	152
3.4	Entiers de Gauss	154
3.5	Inégalité intégrale de van der Corput	157
3.6	Un produit infini complexe	160
3.7	Étude d'une fonction	162
3.8	Sphère de Riemann	162

3.9	Représentations d'une fonction d'une variable complexe . . . . .	166
3.10	Deux propriétés des fonctions holomorphes . . . . .	172
3.11	Existence de la dérivée d'une fonction $f(z)$ . . . . .	173
3.12	Conditions de Cauchy - Riemann . . . . .	174
3.13	Quelques propriétés des fractions rationnelles . . . . .	178
<b>4</b>	<b>Intégration des fonctions d'une variable complexe</b>	<b>185</b>
4.1	Courbes et domaines . . . . .	185
4.2	Calcul direct d'intégrales . . . . .	186
4.3	Applications de la formule de Cauchy . . . . .	195
4.4	Une intégrale par la formule de Cauchy . . . . .	199
4.5	Intégrales de Wallis . . . . .	199
4.6	Une application du théorème de Liouville . . . . .	201
4.7	Une fonction holomorphe ? . . . . .	202
4.8	Formule de la moyenne . . . . .	203
4.9	Représentation intégrale des polynômes de Legendre . . . . .	204
4.10	Fonction génératrice, relation d'orthogonalité des polynômes de Legendre	206
4.11	Étude d'une fonction . . . . .	210
<b>5</b>	<b>Représentation des fonctions analytiques par des séries. Théorème des résidus</b>	<b>213</b>
5.1	Développements en série entière . . . . .	213
5.2	Développements de Laurent . . . . .	218
5.3	Calcul de résidus . . . . .	226
5.4	Résidu en un pôle double . . . . .	230
5.5	Expression intégrale des fonctions de Bessel $J_n$ . . . . .	231
5.6	Singularités d'une fonction . . . . .	232

5.7	Étude d'une fonction . . . . .	238
5.8	Étude d'une fonction définie par une intégrale . . . . .	240
5.9	Coupures . . . . .	243
5.10	Calcul d'une intégrale . . . . .	245
5.11	À propos de $\text{Arctg } z$ . . . . .	248
5.12	Variations sur une intégrale . . . . .	253
5.13	Prolongements analytiques . . . . .	254
5.14	Prolongement analytique de l'intégrale de Gauss . . . . .	260
5.15	Une limite pas si simple . . . . .	263
5.16	Une même série, deux fonctions différentes . . . . .	266
<b>6</b>	<b>Applications élémentaires du théorème des résidus</b>	<b>269</b>
6.1	Calculs d'intégrales (fonctions à une détermination) . . . . .	269
6.2	Quelques intégrales . . . . .	323
6.3	Une intégrale de Fourier . . . . .	326
6.4	Le théorème fondamental de l'algèbre . . . . .	328
6.5	Une formule de Poisson (1823) . . . . .	330
6.6	Calculs d'intégrales (fonctions multiformes) . . . . .	334
6.7	Un rien de supraconductivité . . . . .	366
6.8	Formule d'interpolation de Hermite . . . . .	372
6.9	Majoration de $\cot \pi z$ sur un grand carré . . . . .	375
6.10	Somme de séries . . . . .	376
6.11	Une série impliquant les zéros de $\tan z = z$ . . . . .	383
6.12	D'autres séries impliquant les zéros de $\tan z = z$ . . . . .	387
6.13	Encore une formule de Poisson . . . . .	390

<b>7</b>	<b>Quelques applications de la théorie des fonctions d'une variable complexe</b>	<b>393</b>
7.1	Forme historique d'Euler de la fonction $\Gamma(z)$ . . . . .	393
7.2	Fonction $\Gamma(z)$ . . . . .	396
7.3	À propos des fonctions d'Euler . . . . .	400
7.4	Une formule fondamentale d'Euler . . . . .	405
7.5	Au-delà de la formule de Stirling . . . . .	407
7.6	La fonction $\psi(z)$ . . . . .	412
7.7	L'une des preuves de Riemann de la relation fonctionnelle satisfaite par la fonction $\zeta(z)$ . . . . .	425
7.8	Nombres de Bernoulli . . . . .	427
7.9	Approximation d'une fonction définie par une intégrale . . . . .	431
7.10	Développements asymptotiques . . . . .	434
7.11	Méthode du col . . . . .	436
7.12	Comportement à l'infini d'une fonction définie par une intégrale . . . . .	444
7.13	Le nombre $\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$ , $n \in \mathbb{N}^*$ , est rationnel . . . . .	447
7.14	Énergie libre complexe . . . . .	452
7.15	Transformation du Laplacien par transformation conforme . . . . .	459
7.16	Transformation d'une couronne coupée en rectangle . . . . .	460
7.17	Transformation de Joukovski . . . . .	462
7.18	Une application élémentaire de l'une des formules de Poisson . . . . .	464
7.19	Application d'une transformation conforme pour résoudre un problème de Dirichlet . . . . .	465
<b>8</b>	<b>Analyse de Fourier</b>	<b>469</b>
8.1	Séries de Fourier . . . . .	469
8.2	Complétude des $e_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ . Condition de Vitali . . . . .	488

8.3	Une particule pulsée . . . . .	489
8.4	Une particule qui rebondit sur des murs . . . . .	492
8.5	Variations périodiques de température . . . . .	493
8.6	Quelques transformées de Fourier . . . . .	499
8.7	Retour sur la relation fonctionnelle de la fonction $\zeta(z)$ . . . . .	501
8.8	Résolution d'une équation différentielle et aux différences par la transformation de Fourier . . . . .	507
8.9	Transformée de Fourier du potentiel de Yukawa . . . . .	511
8.10	Transformation de Fourier d'une fonction discontinue . . . . .	512
8.11	Résolution d'une équation aux dérivées partielles à l'aide de la transformation de Fourier . . . . .	514
8.12	Régularisation du potentiel Coulombien dans $\mathbb{R}^D$ . . . . .	515
<b>9</b>	<b>Transformation de Laplace</b>	<b>523</b>
9.1	Relations utiles à propos de la transformation de Laplace . . . . .	523
9.2	Quelques transformées de Laplace . . . . .	525
9.3	Une autre application intégrale . . . . .	527
9.4	Calcul d'une transformée de Laplace par sommation d'une série . . . . .	528
9.5	Transformée de Laplace du sinus intégral . . . . .	530
9.6	Applications de la formule d'inversion . . . . .	533
9.7	Équation différentielle à coefficients constants et transformation de Laplace .	540
9.8	Application à une équation aux différences finies : les suites de Fibonacci	543
9.9	Transformée de Laplace de la fonction partie entière $E(t)$ . . . . .	550
9.10	Calcul d'une intégrale et comportement d'un original . . . . .	552
9.11	Quelques convolutions . . . . .	555
9.12	Applications du théorème d'Efros . . . . .	557
9.13	Mouvement Brownien avec retard . . . . .	559



9.14	Fonction Bêta . . . . .	564
9.15	Équation différentielle à coefficients variables . . . . .	565
9.16	Transformée de Laplace de la fonction de Bessel $J_0(t)$ . . . . .	568
9.17	Résolution d'une équation différentielle du troisième ordre . . . . .	570
9.18	À propos de la fonction partie entière . . . . .	572
9.19	Polynômes de Laguerre et transformation de Laplace . . . . .	575
9.20	Comportement asymptotique d'une fonction $f(t)$ déduit de sa transformée de Laplace . . . . .	578
9.21	Instabilité (amortissement) de Landau . . . . .	580
9.22	Relaxation brisée . . . . .	594
<b>10</b>	<b>Introduction aux fonctions généralisées (distributions)</b>	<b>609</b>
10.1	Formule de Leibniz pour les distributions . . . . .	609
10.2	Sur l'espace $\mathcal{G}$ . . . . .	612
10.3	Précurseur gaussien de $\delta(x)$ . . . . .	612
10.4	Sur $\delta(u(x))$ et sa dérivée. Application à $\delta(1 - x^2)$ . . . . .	614
10.5	Régularisations . . . . .	617
10.6	Dérivation et intégration fractionnaires . . . . .	620
10.7	Transformée de Fourier des distributions $x_{\pm}^z$ . . . . .	625
10.8	Distribution $(1 - x^2)_+^z$ . . . . .	627
10.9	Une curieuse formule de dérivation . . . . .	639
10.10	La distribution $r^z$ dans $\mathbb{R}^D$ et son rapport avec $x_+^{z+D-1}$ . . . . .	641
<b>11</b>	<b>Équations différentielles. Introduction aux fonctions de Green</b>	<b>645</b>
11.1	Quelques équations différentielles . . . . .	645
11.2	Approximations successives de la solution d'une équation du premier ordre (Picard) . . . . .	658
11.3	Points singuliers d'une équation différentielle . . . . .	660

11.4	Méthode de Fuchs . . . . .	663
11.5	Équation d'Airy . . . . .	667
11.6	Formule de Liouville pour le Wronskien d'une équation différentielle linéaire d'ordre $N$ . . . . .	670
11.7	Réduction à la forme canonique de Sturm - Liouville . . . . .	672
11.8	Relation entre une EDO et une équation de Volterra . . . . .	673
11.9	Équation de Clairaut . . . . .	676
11.10	Équation de Bernoulli . . . . .	677
11.11	Mouvement d'une fusée . . . . .	679
11.12	Une équation différentielle non-linéaire . . . . .	681
11.13	Quelques propriétés du propagateur. Théorème de Floquet . . . . .	682
11.14	Dérivée discrète d'une suite . . . . .	685
11.15	Détermination d'une suite à l'aide d'une fonction génératrice . . . . .	686
11.16	Équations aux différences non-linéaires . . . . .	687
11.17	Fonctions de Green de quelques opérateurs élémentaires . . . . .	691
11.18	Fonction de Green de l'équation de Newton pour un champ uniforme variable en temps . . . . .	694
11.19	Résolution d'une équation différentielle . . . . .	698
<b>12</b>	<b>Équations aux dérivées partielles</b>	<b>701</b>
12.1	Équation de transport et transformée de Laplace . . . . .	701
12.2	L'équation de Black - Scholes . . . . .	709
12.3	Diffusion sur $\mathbb{R}_+$ avec une barrière parfaitement réfléchissante à l'origine .	712
12.4	Diffusion dans une boîte avec des murs absorbants ou rayonnants . . . . .	722
12.5	Équation de la chaleur entre deux parois isothermes . . . . .	725
12.6	Équation de diffusion avec source . . . . .	727
12.7	Problème de Cauchy pour des équations quasi-linéaires . . . . .	729

12.8	Corde vibrante et conditions de Dirichlet . . . . .	732
12.9	Corde vibrante amortie. Séparation des variables . . . . .	734
12.10	Équation de Euler - Tricomi . . . . .	737
12.11	Équation de Burgers . . . . .	743
12.12	Vibrations d'une poutre . . . . .	746
12.13	Résolution d'une EDP fortement non-linéaire . . . . .	751
<b>13</b>	<b>Fonctions spéciales</b>	<b>755</b>
13.1	Relations de récurrence et fonctions caractéristiques des polynômes orthogonaux . . . . .	755
13.2	Équation différentielle caractéristique pour le poids $W(x)$ des polynômes orthogonaux . . . . .	762
13.3	Fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ . . . . .	766
13.4	Fonctions de Bessel $J_n(z)$ . . . . .	770
13.5	Quelques intégrales impliquant des fonctions de Bessel . . . . .	777
13.6	À propos des fonctions $\vartheta_\alpha(z, q)$ . . . . .	783
13.7	Le produit infini de Jacobi pour les $\vartheta_\alpha$ . Démonstration de $\vartheta'_1 = \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$ . . . . .	788
13.8	Sur les intégrales elliptiques complètes . . . . .	796
13.9	Les relations de Legendre pour les intégrales elliptiques complètes . . . . .	798
<b>14</b>	<b>Théorie des probabilités et applications</b>	<b>801</b>
14.1	Variable aléatoire à trois valeurs . . . . .	801
14.2	Une variable aléatoire . . . . .	803
14.3	Loi Gamma . . . . .	804
14.4	Variations aléatoires de Cauchy . . . . .	807
14.5	Fonction de répartition d'une variable aléatoire . . . . .	808
14.6	Ajustement empirique d'une variable aléatoire . . . . .	812
14.7	Loi de Pareto . . . . .	814

14.8 Lois de Maxwell et de Laplace . . . . .	816
14.9 Loi de Gumbel . . . . .	820
14.10 Variables de Poisson . . . . .	823
14.11 Variable aléatoire et transformation de Laplace . . . . .	824
14.12 Variable aléatoire continue . . . . .	826
14.13 Étude de deux variables aléatoires . . . . .	828
14.14 Une marche dirigée . . . . .	832
14.15 Sur la fonction caractéristique . . . . .	839
14.16 De l'importance de bien connaître la fonction caractéristique . . . . .	842
14.17 À propos de la fonction de Cantor - Lebesgue . . . . .	846
14.18 Série de variables aléatoires indépendantes . . . . .	849
14.19 Une variable aléatoire peu ordinaire . . . . .	856
14.20 Lois composées . . . . .	860
14.21 Processus récurrents . . . . .	863
<b>15 Introduction à la théorie des groupes et à leur représentation</b>	<b>871</b>
15.1 Sur la structure de groupe . . . . .	871
15.2 Résolution d'équations dans un groupe . . . . .	876
15.3 Groupe des réels . . . . .	877
15.4 Rotations hyperboliques dans le plan . . . . .	878
15.5 Groupe des déplacements plans . . . . .	879
15.6 Groupe symplectique . . . . .	884
15.7 Quaternions . . . . .	886
15.8 Hybridation $sp^2$ . . . . .	890
15.9 Groupe $C_{2v}$ . . . . .	895
15.10 Symétrie de translation d'un réseau unidimensionnel . . . . .	899

<b>16 Éléments de dynamique des systèmes non-linéaires</b>	<b>903</b>
16.1 Des sangliers et des chasseurs . . . . .	903
16.2 Portrait de phase du double puits . . . . .	908
16.3 Un point critique variant comme une lemniscate . . . . .	910
16.4 Cycles-limites . . . . .	911
16.5 Itération . . . . .	916
16.6 Système non-linéaire . . . . .	920
16.7 Itération pour l'équation étudiée dans l'exercice 11.12 . . . . .	923
16.8 Bifurcation du cerceau tournant . . . . .	925
16.9 Points fixes et stabilité . . . . .	927
16.10 Retour sur un canular numérique . . . . .	929
16.11 Oscillateur harmonique pulsé . . . . .	932
16.12 Application toile de tente . . . . .	939
16.13 Sur l'application logistique . . . . .	944
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>947</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>953</b>



# maths

## Chapitre 1

# Algèbre linéaire

“Comme pour tout, et donc pour  
une théorie mathématique,  
la beauté peut être perçue  
mais demeure inexplicable”  
(Arthur CAYLEY, 1821–1895)

## 1.1 Étude de lois de composition

1. On définit dans  $\mathbb{N}$  la loi de composition  $\star$  :

$$n \star n' \stackrel{\text{déf}}{=} n + n' + n.n' \quad (1.1)$$

où  $+$  et  $\cdot$  désigne l'addition et la multiplication usuelles. Analyser la commutativité et l'associativité, et l'existence d'un élément neutre.

Reprendre ces questions pour les deux lois de composition :

$$n \star n' \stackrel{\text{déf}}{=} n + 2n' \quad , \quad n \star n' \stackrel{\text{déf}}{=} 2nn' \quad . \quad (1.2)$$

2. Sur un ensemble  $E$  quelconque, on définit la loi  $a \star b \stackrel{\text{déf}}{=} b$ . Étudier la commutativité et l'associativité ; montrer que tout élément est neutre à gauche. S'il existait un élément neutre à droite, à quoi se réduirait l'ensemble  $E$  ?
3. Sur l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des rationnels, on définit la loi suivante :

$$p \star q \stackrel{\text{déf}}{=} p + \frac{1}{q} \quad (1.3)$$

Former toutes les compositions possibles avec quatre rationnels  $p, q, r$  et  $s$  dans un ordre donné (il existe 5 compositions,  $[(p \star q) \star r] \star s, [p \star (q \star r)] \star s$ , etc., toutes distinctes, montrant l'importance de la notion d'associativité).







1. Il s'agit de montrer que l'ensemble  $E$  des réels  $x_{pq} \stackrel{\text{déf}}{=} p + q\sqrt{N}$ , où  $p$  et  $q$  sont rationnels et  $N$  un entier positif donné qui n'est pas un carré parfait, possède la structure de corps avec les deux LCI "+" et "×" – ce dernier signe étant omis comme d'habitude – (tout comme dans l'écriture de définition des éléments de  $E$ ), étant entendu que  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

En ce qui concerne la stabilité par la LCI "+" – c'est-à-dire la propriété de  $E$  d'être *fermé* pour cette loi (visiblement commutative) –, on doit montrer que la somme  $(p + q\sqrt{N}) + (p' + q'\sqrt{N})$  est de la forme  $p'' + q''\sqrt{N}$  ; on a :

$$(p + q\sqrt{N}) + (p' + q'\sqrt{N}) = p + p' + q\sqrt{N} + q'\sqrt{N} \stackrel{?}{=} p'' + q''\sqrt{N}$$

qui donne immédiatement  $p'' = p + p'$  et  $q'' = q + q'$  ; la stabilité de la multiplication s'analyse en écrivant :

$$(p + q\sqrt{N})(p' + q'\sqrt{N}) = pp' + qq'N + (pq' + p'q)\sqrt{N} \stackrel{?}{=} p'' + q''\sqrt{N}$$

qui donne cette fois  $p'' = pp' + qq'N$ , qui est bien dans  $\mathbb{Q}$ , et  $q'' = pq' + p'q \in \mathbb{Q}$ .

L'élément neutre pour "+" est  $x_{00}$ , l'opposé de  $x_{pq}$  étant  $x_{-p-q} = -x_{pq}$ . L'élément neutre de "×" est  $x_{10}$ , l'inverse de  $x_{pq}$ ,  $x_{pq}^{-1}$ , étant donné par :

$$x_{pq}^{-1} = \frac{1}{p + q\sqrt{N}} = \frac{p - q\sqrt{N}}{p^2 - q^2N} ;$$

le dénominateur de droite n'est jamais nul puisque l'égalité  $N = \frac{p^2}{q^2}$  signifierait que  $N$  est un carré parfait.

Tous comptes faits, l'ensemble  $E$  est bien un sous-corps de  $\mathbb{R}$ .

2. (a) Avec  $k < k'$ , on a  $k + k' < k' + k' = 2k'$  et  $k + k' > k + k = 2k$ , d'où l'existence de  $k'' = \frac{1}{2}(k + k')$  satisfaisant  $k < k'' < k'$ .
- (b) Dès que l'on a trouvé un nombre tel que  $k''$ , on peut recommencer avec les couples  $(k, k'')$  et  $(k'', k')$ , etc., montrant que tout corps ordonné possède une *infinité* d'éléments.

### 1.3 Sous-espace vectoriel

1. Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère l'ensemble des extrémités  $M$  des points dont les coordonnées  $x_i$  satisfont  $\sum_{i=1}^4 x_i = 0$ .
- (a) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  forment un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .
- (b) Trouver une base de ce sous-espace.
- (c) Par extrapolation du même problème dans  $\mathbb{R}^3$ , qualifier la nature géométrique de ce sous-espace.



- (b) Comment s'appellent les vecteurs  $P(x)$  construits sur ces fonctions ?
- (c) Les dérivées  $P'(x)$  forment-elles un sous-espace vectoriel ? Si oui, quelle est la dimension de celui-ci ?

===== ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? =====

1. Soit une combinaison linéaire quelconque  $\mathbf{F} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^N \lambda_n \mathbf{f}_n$ , qui s'écrit :

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^N \lambda_n \mathbf{f}_n = \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^n \lambda_n \mathbf{e}_p = \sum_{p=1}^N \left( \sum_{n=p}^N \lambda_n \right) \mathbf{e}_p \equiv \sum_{p=1}^N \Lambda_p \mathbf{e}_p . \quad (1.6)$$

Les  $\mathbf{e}_p$  étant linéairement indépendants, la nullité de  $\mathbf{F}$  exige que  $\Lambda_p$  soit nul quel que soit  $p$ , d'où  $\Lambda_N = 0$  et donc  $\lambda_N = 0$  ; ensuite,  $\Lambda_{N-1} = 0$  donne  $\lambda_{N-1} + \lambda_N = 0$ , d'où  $\lambda_{N-1} = 0$ , etc., prouvant que  $\mathbf{F} = 0$  ssi tous les  $\lambda_n$  sont nuls.

2. (a) Soit  $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^N \lambda_n x^n$  ; pour montrer que  $f(x) \equiv 0$  ssi tous les  $\lambda_n$  sont nuls, on forme les dérivées successives :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^N n \lambda_n x^{n-1} = 0 , \quad f''(x) = \sum_{n=2}^N n(n-1) \lambda_n x^{n-2} = 0 , \dots$$

$$f^{(r)}(x) = \sum_{n=r}^N n(n-1)\dots(n-r) \lambda_n x^{n-r-1} = 0 , \quad f^{(N)}(x) = N! \lambda_N = 0 .$$

La dernière égalité donne  $\lambda_N = 0$ , la suivante, de la forme  $a\lambda_{N-1} + b\lambda_N = 0$ , donne  $\lambda_{N-1} = 0$  et de proche en proche, tous les  $\lambda_n$  sont nuls.

(b) Les vecteurs  $P(x)$  construits sur ces fonctions ne sont autres que les polynômes de degré  $N$ ,  $\sum_{n=0}^N c_n x^n$ , dont on voit ainsi qu'ils forment un espace vectoriel  $\mathcal{E}_{N+1}$ , sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{C}$  selon que les coefficients  $\{c_n\}$  sont choisis dans un corps ou l'autre, la dimension de l'espace étant égale à  $N + 1$ . Ces coefficients sont les *composantes* (contravariantes) du polynôme. La notion d'indépendance linéaire des monômes  $x^n$  est une autre expression du fait que deux polynômes (de même degré !) sont égaux ssi tous leurs coefficients sont égaux deux à deux.

Si l'on considère que  $N$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $\mathbb{N}$ , les différents espaces  $\mathcal{E}_{N+1}$  sont "emboîtés" les uns dans les autres au sens où  $\mathcal{E}_{N+1} \subset \mathcal{E}_{M+1}$  si  $N < M$ . De plus, dans chacun d'entre eux on peut définir un produit scalaire suivant la règle  $(x^n, x^m) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b x^n x^m d\mu(x)$  où  $\mu(x)$  est une certaine fonction positive définissant la *mesure*. Quand elle est partout dérivable, on note usuellement  $d\mu(x) \stackrel{\text{déf}}{=} W(x)dx$ , où la fonction  $W(x)$  est appelée *poïds*. Cette approche est le point de départ de la définition des polynômes orthogonaux (voir chapitre 13, section 13.1) ; le produit scalaire de  $P(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^N c_n x^n$  et de  $Q(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{m=1}^N d_m x^m$  est ainsi :

$$(P, Q) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n^* d_m g_{nm} = (Q, P)^* , \quad g_{nm} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b x^{n+m} W(x) dx ,$$



le développement du second membre donne :

$$a[\lambda_1 f_1(n+1) + \lambda_2 f_2(n+1)] + b[\lambda_1 f_1(n) + \lambda_2 f_2(n)] \equiv ag(n+1) + bg(n) ,$$

montrant que toute combinaison linéaire de solutions est solution, l'ensemble des solutions formant ainsi un espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $a$  et  $b$  sont réels).

2. Connaissant  $f(0)$  et  $f(1)$ , on en déduit de proche en proche une suite unique :

$$f(2) = af(1) + bf(0) , \quad f(3) = a[af(1) + bf(0)] + bf(1) = (a^2 + b)f(1) + abf(0) , \text{ etc.},$$

de sorte que d'une façon générale :

$$f(n) = \alpha_n f(0) + \beta_n f(1) , \quad \alpha_0 = 1 , \beta_0 = 0 , \alpha_1 = 0 , \beta_1 = 1 .$$

3. Se donnant deux jeux de conditions initiales distincts,  $f_i(0)$  et  $f_i(1)$ ,  $i = 1, 2$ , on en déduit deux suites distinctes  $f_i(n)$  qui ne sont pas proportionnelles l'une à l'autre et donc sont linéairement indépendantes. Comme montré ci-dessus, toute combinaison linéaire  $C_1 f_1(n) + C_2 f_2(n)$  est aussi solution. Réciproquement, toute solution étant donnée, donc de la forme  $f(n) = \alpha_n f(0) + \beta_n f(1)$ , on peut définir deux solutions particulières en prenant d'une part  $f(0) = 1$  et  $f(1) = 0$ , d'autre part  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

4. Avec  $f_i(n) = r^n$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , il vient  $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$  ; écartant la solution triviale  $r = 0$ , les valeurs de  $r$  sont les solutions de  $r^2 - ar - b = 0$ , soit  $r = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4b})$ . La condition sur  $a$  et  $b$  pour avoir deux solutions distinctes est  $a^2 + 4b \neq 0$ . En pareil cas, la solution la plus générale de (1.7) est :

$$f(n) = C_1 r_+^n + C_2 r_-^n , \quad r_{\pm} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4b}) .$$

La solution satisfaisant en outre les conditions ("initiales")  $f(0) = A$  et  $f(1) = B$  est donc telle que :

$$A = C_1 + C_2 , \quad B = C_1 r_+ + C_2 r_- \quad \iff \quad C_1 = \frac{B - Ar_-}{r_+ - r_-} , \quad C_2 = \frac{Ar_+ - B}{r_+ - r_-} .$$

5. Si  $a^2 + 4b = 0$ , posant  $f(n) = r^n \phi(n)$ , il vient :

$$r^{n+2} \phi(n+2) = ar^{n+1} \phi(n+1) - \frac{a^2}{4} r^n \phi(n) \iff r^2 \phi(n+2) - ar \phi(n+1) + \frac{a^2}{4} \phi(n) = 0 .$$

On a une première solution particulière en prenant  $\phi(n) = C^{\text{ste}}$  donnant  $r = \frac{a}{2}$  soit  $f_1(n) = (\frac{a}{2})^n$ . Gardant cette valeur de  $r$ , la récurrence ci-dessus à droite s'écrit :

$$\frac{a^2}{4} \phi(n+2) - \frac{a^2}{2} \phi(n+1) + \frac{a^2}{4} \phi(n) = 0 \quad \iff \quad \phi(n+2) = 2\phi(n+1) - \phi(n) ;$$

par inspection (ou en écrivant les premiers termes), on voit que  $\phi(n) = n$ , d'où une deuxième solution  $f_2(n) = n(\frac{a}{2})^n$ . La solution générale est dans ce cas de la forme :

$$f(n) = (C_1 + C_2 n) \left(\frac{a}{2}\right)^n ,$$

les deux constantes étant fixées par les égalités  $C_1 = f(0)$  et  $(C_1 + C_2)\frac{a}{2} = f(1)$ , d'où la solution satisfaisant les deux conditions initiales prescrites :

$$f(n) = [f(0) + \left(\frac{2}{a}f(1) - f(0)\right)n] \left(\frac{a}{2}\right)^n = (1-n)f(0)\left(\frac{a}{2}\right)^n + f(1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} .$$

◆ *Remarque*

Après avoir étudié la section 11.8 du livre., on pourra ultérieurement faire le lien entre les résultats ci-dessus et la solution de l'équation  $f'' - af' - bf = 0$ . ◆

## 1.6 Opérations sur les matrices

1. Trouver la puissance  $n^e$  de la matrice  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .
2. Soit les deux matrices  $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .
  - (a) Trouver la matrice  $\sigma_2$  hermitique et de trace nulle telle que  $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$ .
  - (b) Combien vaut  $\sigma_\alpha^2$  ?
  - (c) Ces matrices ont-elles chacune un inverse ? Si oui, quels sont-ils ?
  - (d) Montrer que  $e^{i\theta\sigma_\alpha}$  peut s'écrire comme une combinaison *linéaire* de  $\mathbf{1}_2$  et de  $\sigma_\alpha$ .
3. Soit  $\mathcal{P}_N$  la matrice  $N \times N$  dont tous les éléments sont égaux à 1.
  - (a) Comment s'exprime  $\mathcal{P}_N^2$  en fonction de  $\mathcal{P}_N$  ?
  - (b) On pose  $P_N = \varpi \mathcal{P}_N$ , où  $\varpi \in \mathbb{R}$ . Comment doit-on choisir  $\varpi$  pour que  $P_N^2 = P_N$  ?
  - (c) Quelles sont les valeurs propres de  $P_N$  ?
  - (d) Selon le théorème de Cayley - Hamilton, quelle équation satisfait la matrice  $P_N$  ?
4. Soit l'ensemble des matrices  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels, doté des deux LCI addition et multiplication des matrices. Montrer que cet ensemble forme un corps isomorphe à  $\mathbb{C}$  ; quelle est la matrice associée au nombre  $i$  ?
5. Soit la matrice  $\mathcal{R}(\theta) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .





$M$  ayant un déterminant non nul (il est égal à 1), son inverse existe ; selon le même théorème, on a :

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3\mathbf{1}_3 \iff M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\mathbf{1}_3 ,$$

soit :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (1.9)$$

Les premières puissances de  $M$  suggèrent que les éléments de  $M^n$  sont de la forme  $(M^n)_{12} = (M^n)_{23} = n$ ,  $(M^n)_{13} = \frac{1}{2}n(n-1)$ , les autres éléments étant identiques à ceux de  $M$ . Prenant ceci comme hypothèse, on peut alors écrire :

$$(M^{n+1})_{12} = \sum_{j=1}^3 (M^n)_{1j} M_{j2} = 1 \times 1 + n \times 1 + 0 \times 0 = n + 1 ,$$

$$(M^{n+1})_{13} = \sum_{j=1}^3 (M^n)_{1j} M_{j3} = 1 \times 0 + n \times 1 + \frac{1}{2}n(n-1) \times 1 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} ,$$

égalités qui reproduisent au rang suivant les mêmes formes pour les éléments de matrice. Noter que les éléments de matrice traduisent l'égalité  $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$  à l'origine du triangle de Pascal (avec  $p = 0, 1$ ), d'où l'apparition des coefficients du binôme  $C_n^0$  et  $C_n^1$ .

En définitive :

$$M^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ce résultat se prête à l'illustration d'opérations formelles de routine ; par exemple, soit à définir l'exponentielle  $e^{zM}$  où  $z$  est un scalaire, que l'on pose naturellement égale à  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} M^n$ , et est donc la matrice :

$$e^{zM} = \begin{bmatrix} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} & \sum_{n \in \mathbb{N}} n \frac{z^n}{n!} & \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2}n(n-1) \frac{z^n}{n!} \\ 0 & \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} & \sum_{n \in \mathbb{N}} n \frac{z^n}{n!} \\ 0 & 0 & \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \end{bmatrix} ,$$

on reconnaît les développements de  $e^z$ ,  $z e^z$  et  $\frac{1}{2}z^2 e^z$  d'où :

$$e^{zM} = \begin{bmatrix} e^z & z e^z & \frac{1}{2}z^2 e^z \\ 0 & e^z & z e^z \\ 0 & 0 & e^z \end{bmatrix} = e^z \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{1}{2}z^2 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (1.10)$$

Rappelons que, une matrice carrée  $M$  de dimension  $N$  étant donnée ainsi qu'une fonction  $f$  possédant un développement en série entière, le théorème de Cayley -

Hamilton permet d'écrire la matrice  $f(M)$  sous la forme d'un *polynôme* en  $M$  de degré  $N - 1$  ; le calcul précédent illustre ce fait, puisque pour la matrice  $3 \times 3$   $M$ , et pour la fonction exponentielle  $f(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} e^Z$ , on a selon (1.8) et (1.10) avec  $z = 1$  :

$$f(M) \equiv e^M = e \mathbf{1}_3 + e M + \frac{e}{2} M^2$$

et plus généralement :

$$e^{zM} = e^z \mathbf{1}_3 + z e^z M + \frac{1}{2} z^2 e^z M^2 .$$

Un autre exemple de manipulation formelle est le suivant. La matrice  $M$  s'écrit aussi :

$$M = \mathbf{1}_3 + X , \quad X \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

on voit immédiatement que  $X^2$  a un seul élément non nul, tout à fait en haut à droite et égal à 1, et que  $X^3 = 0$  (le polynôme caractéristique de  $X$  est  $\lambda^3 = 0$ ). Soit maintenant à trouver l'inverse de  $M$  en écrivant  $M^{-1} = (1 + X)^{-1}$  ; en utilisant le développement formel de la série géométrique, on a :

$$M^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n X^n = \mathbf{1}_3 - X + X^2 + 0 ,$$

la deuxième égalité venant de  $X^{3+k} = 0$  si  $k \in \mathbb{N}$  ; on retrouve bien ainsi  $M^{-1}$  obtenu autrement en (1.9), et aussi l'égalité formelle entre matrices pour la dimension 3 :

$$\frac{1}{\mathbf{1}_3 + X} = \mathbf{1}_3 - X + X^2 ,$$

qui se généralise immédiatement dans un espace vectoriel de dimension  $N$  :

$$\boxed{\frac{1}{\mathbf{1}_N + X} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n X^n , \quad X^0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{1}_N ,}$$

2. Soit les deux matrices  $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

(a) La matrice  $\sigma_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  telle que  $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$  satisfait l'égalité :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} ,$$

soit :

$$\begin{bmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix} \iff c-b = 2i , \quad a = d .$$

La matrice  $\sigma_2$  est donc de la forme  $\begin{bmatrix} a & b \\ b+2i & a \end{bmatrix}$ . Elle est de trace nulle si  $2a = 0$  et hermitique si  $b^* = b + 2i$ , d'où  $a = 0$  et  $b = -i$  :  $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ .

- (b) On note immédiatement que  $\sigma_\alpha^2 = \mathbf{1}_2$ , quel que soit  $\alpha$ . Ceci peut aussi se voir en invoquant le théorème de Cayley - Hamilton, l'équation caractéristique (commune aux trois  $\sigma_\alpha$ ) étant  $\lambda^2 - 1 = 0$ .
- (c) Le déterminant des  $\sigma_\alpha$  vaut  $-1$  ; étant différent de zéro, chaque  $\sigma_\alpha$  a un inverse. En multipliant l'égalité  $\sigma_\alpha^2 = \mathbf{1}_2$  à gauche (ou à droite, au choix) par  $\sigma_\alpha^{-1}$ , on obtient  $\sigma_\alpha^{-1}\sigma_\alpha^2 = \sigma_\alpha^{-1}$ , soit  $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^{-1}$  : chaque  $\sigma_\alpha$  est égale à son propre inverse.

On remarque que si l'on se propose de trouver les matrices hermitiques  $2 \times 2$  satisfaisant  $\sigma^2 = \mathbf{1}_2$ , on vient d'en trouver déjà 4 : les trois  $\sigma_\alpha$  et  $\mathbf{1}_2$ . Mais il en existe en fait une infinité d'autres, obtenues selon  $P\sigma_\alpha P^{-1}$  où  $P$  est une matrice de changement de base. Ainsi, comparée à l'équation scalaire  $z^2 = 1$ , qui n'a que les deux solutions  $z = \pm 1$ , l'équation matricielle *minimale* (espace vectoriel de dimension 2 !) analogue possède déjà une infinité de solutions. Ceci lève le voile sur l'extrême richesse de l'algèbre des matrices, résultant principalement de la non-commutativité du produit.

- (d) Le symbole  $e^{i\theta\sigma_\alpha}$  est un raccourci d'écriture pour la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\theta)^n}{n!} \sigma_\alpha^n$ .  $p$  étant entier dans  $\mathbb{N}$  (et même dans  $\mathbb{Z}$ ), on a  $\sigma_\alpha^{2p} = \mathbf{1}_2$  et  $\sigma_\alpha^{2p+1} = \sigma_\alpha$  ; la série entière ci-dessus converge uniformément dans le plan  $\mathbb{C}$  puisque  $\sigma_\alpha$  est une matrice de dimension finie (ses valeurs propres sont donc finies, en fait elles valent  $\pm 1$ ) : on peut donc grouper les termes comme on veut. En rassemblant les termes pairs, on obtient la série de Taylor du cosinus, tous en facteur de  $\mathbf{1}_2$  ; les termes impairs, en facteur de  $i\sigma_\alpha$ , reconstituent celui du sinus. Au total :

$$e^{i\theta\sigma_\alpha} = \cos \theta \mathbf{1}_2 + i \sin \theta \sigma_\alpha$$

qui est une formule d'Euler généralisée, rencontrée en théorie quantique dès qu'il s'agit d'un spin  $\frac{1}{2}$ , réel ou fictif. L'exponentielle est bien une combinaison *linéaire* de  $\mathbf{1}_2$  et de  $\sigma_\alpha$ , que l'on peut à nouveau considérer comme une simple conséquence du théorème de Cayley - Hamilton, toutes les puissances supérieures ou égales à 2 s'exprimant en fonction de  $\mathbf{1}_2$  ou  $\sigma_\alpha$ .

On aura remarqué que les matrices  $\mathbf{1}_2$  et les  $\sigma_\alpha$  obéissent à une algèbre identiques à celles des quaternions (voir problème 15.7).

3. (a) Si  $\mathcal{P}_N$  est la matrice  $N \times N$  dont tous les éléments sont égaux à 1, les éléments de matrice de  $\mathcal{P}_N^2$  sont :

$$(\mathcal{P}_N^2)_{ij} = \sum_{k=1}^N (\mathcal{P}_N)_{ik} (\mathcal{P}_N)_{kj} = N \quad ,$$

étant eux aussi tous égaux entre eux, comme ceux de  $\mathcal{P}_N$ , on peut écrire :

$$\mathcal{P}_N^2 = N\mathcal{P}_N$$

- (b) Posant  $P_N = \varpi \mathcal{P}_N$ ,  $\varpi \in \mathbb{R}$ , on a  $P_N^2 = \varpi^2 \mathcal{P}_N^2 = \varpi^2 N \mathcal{P}_N = \varpi N P_N$ . Pour avoir  $P_N^2 = P_N$ , il faut prendre  $\varpi = \frac{1}{N}$ ; alors,  $P_N$  est idempotent : l'élever à une puissance (entière) quelconque ne lui fait rien ; comme appliquer  $P_N$  une deuxième fois ne fait rien de plus, il est naturel de dire, par analogie avec la géométrie élémentaire, que cet opérateur est un *projecteur*.
- (c) En raison de l'égalité  $P_N^2 = P_N$ , les valeurs propres de  $P_N$  ne peuvent être que 0 ou 1 (toujours Cayley - Hamilton !). D'une autre façon, il suffit de raisonner avec les vecteurs propres, qui peuvent former une base ( $P_N$  est diagonalisable en tant que matrice symétrique) ; soit  $|\lambda\rangle$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  :

$$P_N |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \implies P_N^2 |\lambda\rangle = \lambda^2 |\lambda\rangle$$

mais comme  $P_N^2 = P_N$ , on a  $\lambda^2 = \lambda$ , d'où les deux seules possibilités  $\lambda = 0, 1$ . La valeur propre 0 est dégénérée  $N - 1$  fois, et on peut lui associer  $N - 1$  vecteurs propres linéairement indépendants  $|0_k\rangle$ .

Revenant à la notion de projecteur, on voit que le vecteur propre  $|1\rangle$  engendre le sous-espace (unidimensionnel) sur lequel  $P_N$  projette tout vecteur, les  $N - 1$  autres vecteurs propres  $|0_k\rangle$  étant une base pour son complément orthogonal ; un projecteur de ce dernier est l'opérateur  $Q_N \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{1}_N - P_N$  puisque  $Q_N |1\rangle = 0$  et que  $Q_N |0_k\rangle = |0_k\rangle$  quel que soit  $k$ .

- (d) Selon le théorème de Cayley - Hamilton, la matrice  $P_N$  satisfait  $P_N^2 - P_N = 0$ , qui n'est rien d'autre que l'égalité caractéristique traduisant l'idempotence.

4. Soit  $M_{a,b} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ , avec  $a$  et  $b$  réels. La stabilité de l'addition est trivialement assurée :

$$M_{a,b} + M_{a',b'} = \begin{bmatrix} (a+a') & -(b+b') \\ (b+b') & (a+a') \end{bmatrix} \equiv M_{a+a', b+b'} ;$$

en ce qui concerne celle de la multiplication, elle s'écrit :

$$M_{a,b} M_{a',b'} = \begin{bmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{bmatrix} \equiv M_{aa' - bb', ab' + ba'} .$$

Dans les deux relations reliant les couples  $(a, b)$  et  $(a', b')$  pour l'addition et la multiplication des matrices, on reconnaît l'addition et la multiplication des complexes :

$$z \stackrel{\text{déf}}{=} a + ib, z' \stackrel{\text{déf}}{=} a' + ib' \iff z + z' = (a+a') + i(b+b'), z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba') ,$$

d'où l'isomorphisme entre le corps des  $M_{a,b}$  et le corps  $\mathbb{C}$  des complexes, puisqu'il existe d'une part une correspondance biunivoque entre les éléments des deux ensembles *et* que, d'autre part, les opérations effectuées dans l'un de ceux-ci est le fidèle reflet des opérations effectuées dans l'autre – et réciproquement.

De toute évidence, la matrice en correspondance avec  $i$  est  $M_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ; son

carré est  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv M_{-1,0} = -\mathbf{1}_2$ , en traduction fidèle de l'égalité  $i^2 = -1$ .

5. (a) La matrice  $\mathcal{R}(\theta) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  a pour déterminant 1 : celui-ci étant non-nul, elle est régulière. Par la méthode standard (matrice transposée des cofacteurs), on trouve sans peine :

$$\mathcal{R}^{-1}(\theta) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} ;$$

on observe que  $\mathcal{R}^{-1}(\theta) = \mathcal{R}(-\theta)$ .

- (b) Par le produit matriciel, le produit  $\mathcal{R}(\theta)\mathcal{R}(\theta')$  est :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta' \\ -\sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta' & -\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \end{bmatrix} ,$$

où l'on reconnaît les lignes trigonométriques de  $\theta + \theta'$ , d'où :

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta + \theta') & \sin(\theta + \theta') \\ -\sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{bmatrix} \iff \mathcal{R}(\theta)\mathcal{R}(\theta') = \mathcal{R}(\theta + \theta') .$$

- (c)  $\mathcal{R}(\theta)$  est la matrice reliant les composantes de deux vecteurs du plan  $\mathbb{R}^2$  se transformant l'un dans l'autre par une rotation de l'angle  $\theta$ .

6. La matrice  $M$  est inversible puisque son déterminant est non nul – il vaut 1 (la matrice étant triangulaire, c'est juste le produit des éléments diagonaux). En appliquant la règle de calcul de l'inverse, on trouve :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (1.11)$$

que l'on peut aussi obtenir par des manipulations élémentaires en partant du théorème de Cayley - Hamilton, lequel s'écrit ici :

$$M^4 - 4M^3 + 6M^2 - 4M + \mathbf{1}_4 = 0 \iff M^{-1} = -M^3 + 4M^2 - 6M + 4\mathbf{1}_4 ,$$

puisque, la matrice étant triangulaire,  $\det(M - \lambda\mathbf{1}_4) = (1 - \lambda)^4$ . Pour une matrice de dimension  $N$  quelconque, on écrit  $M_{ij} = \delta_{ij} - a\delta_{ij-1}$ , avec  $1 \leq i, j \leq N$ , et on cherche à vérifier que :

$$(M^{-1})_{kl} = \begin{cases} a^{l-k} & k \leq l \\ 0 & k > l \end{cases} \quad (1.12)$$

est effectivement la matrice inverse. On a :

$$(MM^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^j (\delta_{ik} - a\delta_{ik-1})a^{j-k} = \sum_{k=1}^j \delta_{ik}a^{j-k} - \sum_{k=1}^j \delta_{ik-1}a^{j-k+1} .$$

La seconde somme s'écrit  $\sum_{k'=0}^{j-1} \delta_{ik'}a^{j-k'}$  : elle est nulle si  $i+1 > j$  et vaut  $a^{j-i}$  si  $i+1 \leq j$  ; de surcroît, le terme  $k'=0$  est toujours nul puisque  $i \geq 1$ . Il vient ainsi :

$$(MM^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^j \delta_{ik}a^{j-k} - \sum_{k'=1}^{j-1} \delta_{ik'}a^{j-k'} .$$

Seul le terme  $k = j$  de la première somme survit à la différence des deux sommes, donnant  $(MM^{-1})_{ij} = \delta_{ij}$ , comme escompté. Ce résultat peut aussi s'obtenir moins laborieusement en écrivant  $M = \mathbf{1}_4 - aX$  avec :

$$X \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et  $X^{4+k} = 0$  si  $k \in \mathbb{N}$ . En développant formellement en série géométrique :

$$M^{-1} = \frac{1}{\mathbf{1}_4 - aX} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (aX)^n = \mathbf{1}_4 + aX + a^2X^2 + a^3X^3,$$

procédé qui redonne (1.11), mais beaucoup plus vite. Pour une dimension quelconque  $N$ , on a toujours  $M = \mathbf{1}_N - aX$ ,  $X$  de même structure que ci-dessus, et avec cette fois  $X^{N+k} = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , d'où immédiatement :

$$M^{-1} = \mathbf{1}_N + \sum_{q=1}^{N-1} a^q X^q$$

obtenant ainsi plus *élégamment* la généralisation du résultat (1.11).

7. (a) La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \mu_k^n$  est le développement en série entière de l'exponentielle  $e^{\mu_k}$ , qui est convergente  $\forall \mu_k \in \mathbb{C}$ .
- (b) Toutes les valeurs propres de  $M$  étant finies, la somme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} M^n$  est une matrice notée  $e^M$  dont les valeurs propres sont les  $e^{\mu_k}$ , et les vecteurs propres ceux de  $M$  ; en conséquence, utilisant la notation de Dirac [9] et notant  $|\mu_k\rangle$  les vecteurs propres normalisés à l'unité, la décomposition spectrale de  $e^M$  s'écrit :

$$e^M = \sum_k |\mu_k\rangle e^{\mu_k} \langle \mu_k|.$$

- (c) Cela fait, la matrice  $\mathcal{E}(z) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{zM}$ , où  $z \in \mathbb{C}$ , est bien définie ; on a d'une part :

$$\mathcal{E}(z + z') = \sum_k |\mu_k\rangle e^{\mu_k(z+z')} \langle \mu_k|,$$

d'autre part :

$$\mathcal{E}(z)\mathcal{E}(z') = \sum_{k,k'} |\mu_k\rangle e^{\mu_k z} \langle \mu_k|\mu_{k'}\rangle e^{\mu_{k'} z'} \langle \mu_{k'}|.$$

La matrice  $M$  étant hermitique, ses vecteurs propres sont orthogonaux, d'où  $\langle \mu_k|\mu_{k'}\rangle = \delta_{kk'}$  et en conséquence :

$$\mathcal{E}(z)\mathcal{E}(z') = \sum_k |\mu_k\rangle e^{\mu_k z} e^{\mu_k z'} \langle \mu_k| = \mathcal{E}(z + z').$$

- (d) L'inverse de  $\mathcal{E}(z)$  est la matrice ayant les mêmes vecteurs propres et les valeurs propres  $\frac{1}{e^{\mu_k z}} = e^{-\mu_k z}$  :

$$(\mathcal{E}(z))^{-1} \equiv (e^{Mz})^{-1} = \sum_k |\mu_k\rangle e^{-\mu_k z} \langle \mu_k| \equiv e^{-Mz} , \quad (1.13)$$

- (e) Les valeurs propres de  $\mathcal{E}(it)$  sont les nombres  $e^{it\mu_k}$  qui,  $t$  étant réel, sont tous de module unité :  $\mathcal{E}(it)$  est donc une matrice unitaire.

- (f) On déduit que  $[\mathcal{E}(it)]^\dagger = (\mathcal{E}(it))^{-1}$ , qui vaut donc  $\mathcal{E}(-it)$  selon (1.13).

- (g) i. On a  $R(z) = \frac{1}{z} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{H}{z}\right)^n$  ; la série géométrique  $S(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} Z^n$  converge ssi  $|Z| < 1$ , ce qui impose ici  $|z| > \max |E_p|$ , soit à l'extérieur du disque dont le rayon est égal au module de la plus grande valeur propre en module.

- ii. On sait que  $S(Z) = \frac{1}{1-Z}$  quand  $|Z| < 1$ , de sorte que :

$$\forall z, |z| > \max |E_p| : R(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{\mathbf{1} - \frac{H}{z}} = \frac{1}{z\mathbf{1} - H} .$$

Dans le langage de la théorie quantique où la matrice  $H$  est une représentation du Hamiltonien,  $R(z)$  s'appelle *résolvante* et joue un rôle de premier plan pour l'évolution temporelle d'un système ou la détermination de sa densité d'état [10].

## 1.7 Diagonalisation

1. Soit la matrice  $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

- (a) Trouver tous ses vecteurs propres. Cette matrice est-elle diagonalisable ?  
 (b) Généraliser ces résultats à la matrice  $M_N$  de dimension quelconque.

2. Soit une application linéaire  $H$  dans un espace vectoriel de dimension  $N$ , dont la matrice sur la base orthonormée  $\{|e_n\rangle\}_n$  est la matrice  $\mathcal{H}$ , dont les seuls éléments non nuls sont ceux situés juste au-dessus et au-dessous de la diagonale principale, et aux extrémités de l'"anti-diagonale", tous égaux à  $v \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} 0 & v & 0 & \dots & 0 & v \\ v & 0 & v & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & v & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & v & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & v & 0 & v \\ v & 0 & \dots & 0 & v & 0 \end{bmatrix}$$





la seconde égalité venant de  $\langle e_n | e_{m+1} \rangle = \delta_{nm+1}$ . Avec la convention d'écriture adoptée,  $|e_{N+n}\rangle = |e_n\rangle$ , toutes les égalités entre indices doivent être entendues<sup>2</sup> modulo  $N$  ; avec  $k < l$  les seuls éléments non nuls de la matrice représentant l'application  $R^2$ ,  $(\mathcal{R}^2)_{kl}$ , sont ceux tels que  $k = l - 2$  ; pour le triangle inférieur,  $k > l$ , les seuls éléments  $(\mathcal{R}^2)_{kl}$  non nuls sont ceux pour lesquels  $k = l - 2 + N$ . Au total, les seuls éléments non nuls sont ceux dont la différence des indices est, en valeur absolue, égale à 2 modulo  $N$ , soit  $|k - l| = 2(N)$ .

L'argument est le même pour les éléments  $(\mathcal{R}^n)_{kl}$  :

$$(\mathcal{R}^n)_{kl} = \delta_{|k-l|n(N)} .$$

De façon imagée, le passage de  $\mathcal{R}^n$  à  $\mathcal{R}^{n+1}$  se traduit par une montée d'un étage de la ligne à 45° des éléments non nuls situés dans les triangles supérieur et inférieur. Lorsque l'on arrive à la puissance  $N$ , tous les éléments non nuls sont sur la diagonale principale et valent 1, d'où l'égalité  $\mathcal{R}^N = \mathbf{1}_N$ .

- (d) Les valeurs propres de  $R$  sont celles de sa matrice représentative  $\mathcal{R}$  ; comme  $\mathcal{R}^N = \mathbf{1}_N$ , le théorème de Cayley - Hamilton dit que l'équation caractéristique de  $\mathcal{R}$  est  $r^N = 1$  : les valeurs propres sont donc les  $N$  racines  $N^{\text{es}}$  de l'unité :

$$r_k = e^{ik\frac{2\pi}{N}} \equiv e^{ik\theta} , \quad \theta = \frac{2\pi}{N} , \quad k = 1, 2, \dots, N .$$

Elles sont toutes distinctes,  $r_k \neq r_{k'}$  si  $k \neq k'$  : il n'y a donc pas dégénérescence.

- (e) On a :

$$H|\psi_k\rangle = v(R + R^\dagger)|\psi_k\rangle = v \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N r_k^m (|e_{n+1}\rangle \langle e_n| + |e_n\rangle \langle e_{n+1}|) |e_m\rangle ;$$

compte tenu de l'orthonormalisation de la base  $\{|e_n\rangle\}$ , il vient :

$$H|\psi_k\rangle = v \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N r_k^m (|e_{n+1}\rangle \delta_{nm} + |e_n\rangle \delta_{n+1m}) = v \sum_{n=1}^N (r_k^n |e_{n+1}\rangle + r_k^{n+1} |e_n\rangle) ;$$

en faisant glisser d'un cran vers le bas l'indice muet de la première somme (et en jouant toujours implicitement avec  $N + 1 = 1(N)$ ), il vient :

$$H|\psi_k\rangle = v \sum_{n=1}^N (r_k^{n-1} + r_k^{n+1}) |e_n\rangle = 2v \left( r_k + \frac{1}{r_k} \right) \sum_{n=1}^N r_k^n |e_n\rangle ,$$

d'où finalement  $H|\psi_k\rangle = 2v \cos k\theta |\psi_k\rangle$  ;  $|\psi_k\rangle$  est bien propre de  $H$ , la valeur propre étant  $2v \cos k\frac{2\pi}{N}$ .

- (f) La base étant orthonormalisée, le carré de la norme de tout vecteur est la somme des modules carrés de ses composantes ; pour  $|\psi_k\rangle$ , introduisant en

---

<sup>2</sup>On peut se représenter la situation en imaginant  $N$  points régulièrement répartis sur un cercle.

facteur la constante de normalisation  $\mathcal{N}$ , la normalisation à l'unité s'exprime comme :

$$|\mathcal{N}|^2 \sum_{n=1}^N |r_k^n|^2 = 1 \iff |\mathcal{N}|^2 N = 1 ,$$

puisque tous les  $r_k$  sont de module unité. Les vecteurs propres normalisés sont donc :

$$|\psi_k\rangle = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ink\theta} |e_n\rangle$$

où  $\alpha$  est une phase arbitraire. On sait que les  $|\psi_k\rangle$  sont orthogonaux en tant que vecteurs propres d'une matrice symétrique<sup>3</sup> dépourvue de dégénérescence ; ceci se vérifie facilement :

$$\langle \psi_k | \psi_{k'} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (e^{ikn\theta})^* e^{ik'n\theta} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i(k'-k)n\theta} ;$$

avec  $k \neq k'$ , la somme géométrique de droite vaut  $e^{i(k'-k)\theta} \frac{1 - e^{i(k'-k)N\theta}}{1 - e^{i(k'-k)\theta}}$ , fraction dont le numérateur est nul puisque  $k$  et  $k'$  sont entiers et que  $N\theta = 2\pi$ .

$U$  étant la matrice de passage  $\{|e_n\rangle\}_n \rightarrow \{|\psi_k\rangle\}_k$ , on a  $|\psi_k\rangle = \sum_n U_{nk} |e_n\rangle$  ; multipliant cette égalité à gauche par  $\langle e_m |$ , il vient  $\langle e_m | \psi_k \rangle = \sum_n U_{nk} \delta_{mn} = U_{mk}$ , égalité que l'on lit à l'envers pour en déduire :

$$U_{mk} = \langle e_m | \psi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{imk\theta}$$

$U$  est une transformation unitaire ; la base étant orthonormée, la matrice inverse s'obtient en transposant et en conjuguant la matrice de  $U$  :

$$(U^{-1})_{km} = (U_{mk})^* = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-imk\theta} .$$

Il est aisé de vérifier (en sommant les progressions géométriques) que :

$$\sum_{m=1}^N (U^{-1})_{km} U_{mk'} = \delta_{kk'} ,$$

comme il se doit.

## 1.8 Changement de base

1. (a) L'espace  $\mathbb{R}^3$  est rapporté à un repère orthonormé  $Oxyz$  défini par les trois vecteurs orthonormalisés  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ; soit  $OXYZ$ ,  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ , le repère obtenu du précédent par rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $Ox$ . Exprimer les composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  d'un vecteur quelconque en fonction de ses composantes sur  $Oxyz$ .

---

<sup>3</sup>ou plus généralement hermitique.



L'égalité de deux vecteurs est équivalente à l'égalité de leurs composantes deux à deux, d'où :

$$X = x, \quad Y \cos \theta - Z \sin \theta = y, \quad Y \sin \theta + Z \cos \theta = z;$$

ce système linéaire s'inverse facilement pour donner :

$$X = x, \quad Y = y \cos \theta + z \sin \theta, \quad Z = -y \sin \theta + z \cos \theta,$$

que l'on peut exprimer sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_x(\theta).$$

- (b) L'axe de la rotation d'angle  $\theta$  peut être considéré comme le transformé de l'axe  $Ox$  par une rotation d'angle  $\phi$  autour de  $Oz$  ; appelons  $Ox'y'z'$  le repère orthonormé se déduisant de  $Oxyz$  par cette dernière rotation. En transposant convenablement les résultats ci-dessus, on voit que les composantes  $(x', y', z')$  d'un même vecteur sur  $Ox'y'z'$  sont reliées à ses composantes  $(x, y, z)$  par :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_3(\phi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Maintenant, le repère  $OXYZ$  se déduisant de  $Ox'y'z'$  par une rotation autour de  $Ox'$ , on a :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_1(\theta) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Effectuant le produit des matrices, on a finalement :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1(\theta) \mathcal{R}_3(\phi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

On remarque que la matrice du produit  $\mathcal{R}_1(\theta) \mathcal{R}_3(\phi)$  n'est pas invariante dans l'échange de  $\theta$  et  $\phi$ , traduisant le fait que deux rotations autour de deux axes *différents* ne commutent pas.

2. (a) Le produit scalaire  $\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2$  vaut  $\vec{a}_1 \cdot \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} = 0$  puisque le numérateur est un produit mixte contenant deux vecteurs identiques ; il en va de même pour tous

les  $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j$  si  $i \neq j$ . En revanche,  $\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_1 \cdot \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} = 1$ , et de même pour les deux autres  $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_i$ . Au total :

$$\boxed{\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}}$$

Les  $\vec{b}_j$  sont (à un éventuel facteur  $2\pi$  près tributaire d'une convention) les vecteurs d'un espace  $\mathbb{R}^3$  dit *réciproque*.

- (b) Avec  $\vec{r} = \sum_i \nu_i \vec{a}_i$  et  $\vec{k} = \sum_j \mu_j \vec{b}_j$ , utilisant la distributivité du produit scalaire, on a :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \sum_i \sum_j \nu_i \mu_j \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \sum_i \sum_j \nu_i \mu_j \delta_{ij} = \sum_i \nu_i \mu_i .$$

- (c) Si  $\vec{R} = \sum_i n_i \vec{a}_i$  où  $n_i \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire si  $\vec{R}$  est une combinaison en *entiers* des trois  $\vec{a}_i$ , on a plus précisément  $\vec{k} \cdot \vec{R} = \sum_i n_i \mu_i$  ; la condition cherchée s'écrit alors :

$$e^{i \sum_i n_i \mu_i} = 1 \quad \forall n_i .$$

Choisissant  $n_2 = n_3 = 0$ , il faut  $e^{in_1 \mu_1} = 1$  quel que soit  $n_1$ , c'est-à-dire que  $\mu_1$  est un multiple entier de  $2\pi$ . Répétant le même argument avec  $n_1 = n_3 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 0$ , on voit finalement que la condition est équivalente à dire que  $\frac{1}{2\pi} \vec{k}$  est une combinaison linéaire *en entiers* des trois vecteurs  $\vec{b}_j$  :

$$\boxed{\vec{k} = 2\pi \sum_j m_j \vec{b}_j \quad m_j \in \mathbb{Z}}$$

- (d) On part de l'égalité :

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \frac{1}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} [\xi_1 \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 + \xi_2 \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 + \xi_3 \vec{a}_1 \times \vec{a}_2]$$

que l'on multiplie scalairement par  $\vec{a}_1$  ; il vient ainsi :

$$x_1 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = \xi_1 ,$$

puisque  $\vec{a}_1$  est orthogonal à  $\vec{a}_3 \times \vec{a}_1$  et à  $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ . D'une façon générale, et posant  $g_{ij} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = g_{ji}$ , on a :

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathbf{g} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ,$$

le calcul par la méthode classique de la matrice inverse conduit à :

$$\mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} -g_{23}^2 + g_{22}g_{33} & g_{13}g_{23} - g_{12}g_{33} & -g_{13}g_{22} + g_{12}g_{23} \\ g_{13}g_{23} - g_{12}g_{33} & -g_{13}^2 + g_{11}g_{33} & g_{12}g_{13} - g_{11}g_{23} \\ -g_{13}g_{22} + g_{12}g_{23} & g_{12}g_{13} - g_{11}g_{23} & -g_{12}^2 + g_{11}g_{22} \end{bmatrix} .$$

avec  $D = g_{11}g_{22}g_{33} + 2g_{12}g_{13}g_{23} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2 - g_{33}g_{12}^2$ .

3. (a) Soit  $\vec{M}'$ , de composantes  $(x', y', z')$ , le vecteur transformé de  $\vec{M}$  de composantes  $(x, y, z)$  par la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $Ox$ . Comme il est équivalent de laisser le vecteur immobile et de faire tourner le repère en sens inverse, on a :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} M_{Ox, \theta} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

De même pour la rotation autour de  $Oz$  :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' & 0 \\ \sin \theta' & \cos \theta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} M_{Oz, \theta'} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

- (b) En effectuant le produit  $M_{Ox, \theta} M_{Oz, \theta'}$ , on obtient :

$$M_{Ox, \theta} M_{Oz, \theta'} = \begin{bmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' & 0 \\ \cos \theta \sin \theta' & \cos \theta \cos \theta' & -\sin \theta \\ \sin \theta \sin \theta' & \sin \theta \cos \theta' & \cos \theta \end{bmatrix},$$

alors que le produit dans l'autre ordre est :

$$M_{Oz, \theta'} M_{Ox, \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \cos \theta & \sin \theta' \sin \theta \\ \sin \theta' & \cos \theta' \cos \theta & -\cos \theta' \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

montrant que ces deux rotations ne commutent pas :

$$\boxed{M_{Ox, \theta} M_{Oz, \theta'} \neq M_{Oz, \theta'} M_{Ox, \theta} \iff [M_{Ox, \theta}, M_{Oz, \theta'}] \neq 0}$$

- (c) On peut illustrer géométriquement la non-commutativité de deux rotations en choisissant un cas très simple, par exemple en prenant le vecteur unitaire  $\vec{i}$  de  $Ox$  et en lui appliquant deux rotations de  $90^\circ$  dans un ordre ou l'autre :

$$\vec{i} \xrightarrow{R_{x, \frac{\pi}{2}}} \vec{i} \xrightarrow{R_{z, \frac{\pi}{2}}} \vec{j}, \quad \vec{i} \xrightarrow{R_{z, \frac{\pi}{2}}} \vec{j} \xrightarrow{R_{x, \frac{\pi}{2}}} \vec{k}.$$

- (d) Au contraire, deux rotations quelconques autour du même axe commutent entre elles de toute évidence. Ceci se retrouve évidemment sur le produit des matrices les représentant. Pour des rotations autour de  $Oz$  par exemple, on a :

$$M_{Oz, \theta} M_{Oz, \theta'} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' & 0 \\ \sin \theta' & \cos \theta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

produit qui s'effectue pour donner :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -\sin \theta \cos \theta' - \sin \theta' \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta & \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



Comme  $D_1(a_1; x) = a_1 + x$ , on obtient l'égalité cherchée après mise en facteur du produit des  $a_n$ .

La dérivée d'un déterminant s'obtient en faisant la somme des dérivées des colonnes ou des lignes. Dérivant ici les colonnes, on voit immédiatement que toutes les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2 sont nulles ; la valeur de  $D_N$  en  $x=0$  est manifestement le produit des  $a_n$ , et la première dérivée est immédiate à calculer, d'où le développement de Taylor de  $D_N(a_1, a_2, \dots, a_N; x)$  centré en  $x=0$ .

## 1.10 Déterminant de van der Monde

③ Un déterminant de van der Monde est de la forme :

$$D_N(a_1, a_2, \dots, a_N) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{N-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{N-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{N-1} & a_{N-1}^2 & \dots & a_{N-1}^{N-1} \\ 1 & a_N & a_N^2 & \dots & a_N^{N-1} \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

1. En utilisant la multilinéarité, montrer que ce déterminant est égal à :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{N-2}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{N-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{N-1} & a_{N-1}^2 & \dots & a_{N-1}^{N-2}(a_{N-1} - a_1) \\ 1 & a_N & a_N^2 & \dots & a_N^{N-2}(a_N - a_1) \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

2. Répétant la même opération sur les colonnes deux à deux, en déduire que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{N-2}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{N-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{N-1} - a_1 & a_{N-1}(a_{N-1} - a_1) & \dots & a_{N-1}^{N-2}(a_{N-1} - a_1) \\ 1 & a_N - a_1 & a_N(a_N - a_1) & \dots & a_N^{N-2}(a_N - a_1) \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

3. Exprimer  $D_N$  à l'aide d'un déterminant de dimension inférieure.

4. En déduire que :

$$D_N(a_1, a_2, \dots, a_N) = \prod_{1 \leq m < n < N} (a_n - a_m) \quad (1.19)$$



5. Commenter cette expression.

6. En s'appuyant sur le cas particulier  $N = 4$  et  $a_n = x^{n-1}$ , trouver les zéros du polynôme  $P_4(x) = x^4 - 3x^5 + x^6 + 4x^7 - 2x^8 - 2x^9 - 2x^{10} + 4x^{11} + x^{12} - 3x^{13} + x^{14}$ .

===== ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? =====

1. On multiplie l'avant-dernière colonne par  $a_1$  puis on la retranche de la dernière pour obtenir :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{N-1} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_1 a_2^{N-2} & a_2^{N-2}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_1 a_3^{N-2} & a_3^{N-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{N-1} & a_{N-1}^2 & \dots & a_1 a_{N-1}^{N-2} & a_{N-1}^{N-2}(a_{N-1} - a_1) \\ 1 & a_N & a_N^2 & \dots & a_1 a_N^{N-2} & a_N^{N-2}(a_N - a_1) \end{vmatrix} \quad (1.20)$$

2. Multipliant maintenant l'avant-avant dernière colonne par  $a_1$  et la retranchant de l'avant-dernière, puis répétant cette opération sur les couples de colonnes, on arrive de proche en proche à :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_2^{N-2}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_3^{N-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{N-1} - a_1 & a_{N-1}(a_{N-1} - a_1) & \dots & a_{N-1}^{N-2}(a_{N-1} - a_1) \\ 1 & a_N - a_1 & a_N(a_N - a_1) & \dots & a_N^{N-2}(a_N - a_1) \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

3. En développant suivant la première ligne puis en mettant en facteur  $(a_2 - a_1), (a_3 - a_1), \dots, (a_N - a_1)$ , on obtient un déterminant de van der Monde de dimension  $N - 1$  ; très précisément :

$$D_N(a_1, a_2, \dots, a_N) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_N - a_1)D_{N-1}(a_2, a_3, \dots, a_N) \quad (1.22)$$

4. Le résultat précédent permet d'affirmer que le déterminant  $D_{N-1}(a_2, a_3, \dots, a_N)$  est égal à  $(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)\dots(a_N - a_2)D_{N-2}(a_3, a_4, \dots, a_N)$ , et ainsi de suite, d'où finalement l'expression (1.19).

5. On observe que le déterminant est bien nul si deux ou plusieurs  $a_n$  coïncident.

6. Avec  $N = 4$  et  $a_n = x^{n-1}$ , le déterminant de van der Monde est :

$$D_4(1, x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^4 & x^6 \\ 1 & x^3 & x^6 & x^9 \end{vmatrix} \quad (1.23)$$





1. Après multiplication membre à membre par  $(x - x'')^{\alpha-1}$  de (1.24) et intégration membre à membre sur  $x''$ , il vient :

$$\int_0^x dx'' \int_0^{x''} (x - x'')^{\alpha-1} \frac{f(x')}{(x'' - x')^\alpha} dx' = \int_0^x \sigma(x'')(x - x'')^{\alpha-1} dx'' .$$

Échangeant l'ordre des intégrations à gauche, on obtient :

$$\int_0^x f(x') dx' \int_{x'}^x \frac{(x - x'')^{\alpha-1}}{(x'' - x')^\alpha} dx'' = \Sigma(x) , \quad \Sigma(x) = \int_0^x (x - x'')^{\alpha-1} \sigma(x'') dx'' .$$

Noter que c'est ici qu'intervient l'hypothèse additionnelle  $\alpha > 0$  afin d'assurer la convergence de l'intégrale interne à sa borne inférieure.

2. L'intégrale interne est  $\int_{x'}^x (x - x'')^{\alpha-1} (x'' - x')^{-\alpha} dx''$ , d'où l'idée de poser  $x'' - x' = y$ , qui donne  $\int_0^{x-x'} (x - x' - y)^{\alpha-1} y^{-\alpha} dy$ , forme qui suggère à son tour de poser  $y = (x - x')t$  pour obtenir l'intégrale  $\int_0^1 (x - x')^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha-1} (x - x')^{-\alpha} t^{-\alpha} (x - x') dt$ , soit  $\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{-\alpha} dt$ . Cette dernière intégrale est la fonction B( $\alpha$ ,  $1 - \alpha$ ) d'Euler (chapitre 7, section 7.1), égale à  $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ , ce dernier produit étant égal à  $\frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$  en vertu de la formule des compléments. Le point important est que le résultat de cette intégration est *indépendant* de  $x'$  (et d'ailleurs aussi de  $x$ ).

3. Compte tenu de ceci, on a maintenant :

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \int_0^x f(x') dx' = \Sigma(x) \implies f(x) = \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi \Sigma'(x) .$$

4. On a donc :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi \frac{d}{dx} \int_0^x (x - x'')^{\alpha-1} \sigma(x'') dx'' = \frac{1}{\pi} \sin \alpha\pi \frac{d}{dx} \int_0^x x'^{\alpha-1} \sigma(x - x') dx' .$$

Rappelons comment effectuer la dérivation du terme intégral, le plus direct étant d'en revenir à la définition de la dérivée :

$$\frac{d}{dx} \int_0^x x'^{\alpha-1} \sigma(x - x') dx' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_0^{x+h} x'^{\alpha-1} \sigma(x+h-x') dx' - \int_0^x x'^{\alpha-1} \sigma(x-x') dx' \right] ;$$

Le grand crochet est :

$$\left[ \dots \right] = \int_0^x x'^{\alpha-1} [\sigma(x+h-x') - \sigma(x-x')] dx' + \int_x^{x+h} x'^{\alpha-1} \sigma(x+h-x') dx' ;$$

la fonction  $\sigma$  étant dérivable et à dérivée continue, on peut écrire :

$$\sigma(x+h-x') = \sigma(x-x') + h\sigma'(x-x') + h\eta(x-x'; h) , \quad \lim_{h \rightarrow 0} \eta(x-x'; h) = 0 , \quad \forall x-x' ,$$

d'où :

$$\left[ \dots \right] = h \int_0^x x'^{\alpha-1} [\sigma'(x-x') + \eta(x-x'; h)] dx' + \int_x^{x+h} x'^{\alpha-1} \sigma(x+h-x') dx' .$$

Reportant ces expressions dans le grand crochet figurant dans la définition de la dérivée, il reste après simplification des termes qui se compensent :

$$\frac{d}{dx} \int_0^x x'^{\alpha-1} \sigma(x-x') dx' = \int_0^x x'^{\alpha-1} \sigma'(x-x') dx' + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_0^x \eta(x-x'; h) dx' + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} x'^{\alpha-1} \sigma(x+h-x') dx' \right].$$

$\eta$  tendant vers zéro avec  $h$ , la première intégrale est nulle à la limite ; par ailleurs, la fonction  $\sigma$  étant continue (puisqu'elle est dérivable) sur le compact  $[x, x+h]$ , elle est bornée, assurant que la limite du terme à droite d'une part existe et d'autre part est égale à  $x^{\alpha-1} \sigma(0)$ . En définitive :

$$\frac{d}{dx} \int_0^x x'^{\alpha-1} \sigma(x-x') dx' = \int_0^x x'^{\alpha-1} \sigma'(x-x') dx' + x^{\alpha-1} \sigma(0),$$

dont le mode de formation est clair, pourvu que  $\sigma$  ait les propriétés mentionnées ci-dessus : le premier terme vient d'une dérivation sous l'intégrale, le deuxième résulte du fait que  $\frac{d}{dx} \int_0^x f(x') dx' = f(x)$ , égalité parfois appelée *théorème fondamental du calcul intégral*. Cette expression de la dérivée peut être transformée en posant  $x'' = x - x'$  afin d'obtenir la forme traditionnelle de la solution de l'équation d'Abel généralisée :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin \alpha \pi \left[ \sigma(0) x^{\alpha-1} + \int_0^x (x-x'')^{\alpha-1} \sigma'(x'') dx'' \right]$$

◆ *Remarque*

Cette équation, rencontrée à propos du pendule isochrone de Huyghens (chapitre 9, sous-section 9.5.6) avec  $\alpha = \frac{1}{2}$ , y est résolue en tant qu'application du théorème de convolution pour la transformation de Laplace. ◆

## 1.13 Équation de Fredholm

1. Soit l'équation de Fredholm de seconde espèce :

$$f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} (x \cos x' + x'^2 \sin x + \cos x \sin x') f(x') dx' = x. \quad (1.27)$$

Trouver sa solution quand  $\lambda \neq \pm i \frac{1}{\pi \sqrt{2}}$ .

2. Trouver les noyaux itérés et la série de Neumann pour l'équation de Fredholm de seconde espèce dont le noyau est  $K(x, x') = xx'$ , les bornes de l'intégrale étant  $a=0$  et  $b=1$  ; pour quelles valeurs de  $\lambda$  la série est-elle convergente ? En déduire la forme générale de la solution pour une source  $\sigma(x)$  donnée.



Chacune des intégrales présentes dans les seconds membres peut maintenant être effectivement calculée ; on obtient ainsi :

$$A = (1 + \lambda A) \times 0 + \lambda B \times 0 + \lambda C \times \pi ,$$

$$B = (1 + \lambda A) \times 0 + \lambda B \times 0 + \lambda C \times (-4\pi) ,$$

$$C = (1 + \lambda A) \times 2\pi + \lambda B \times \pi + \lambda C \times 0 ,$$

d'où le système linéaire inhomogène pour les trois inconnues  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

$$A - \pi\lambda C = 0 , \quad B + 4\pi\lambda C = 0 , \quad -2\pi\lambda A - \pi\lambda B + C = 2\pi .$$

Le déterminant des inconnues est  $D(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\pi^2\lambda^2$  ;

si donc  $\lambda \neq \pm \frac{i}{\pi\sqrt{2}}$ , l'application de la méthode systématique de résolution d'un tel système conduit à :

$$A = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ 2\pi & -\pi\lambda & 1 \end{vmatrix} = \frac{2\pi^2\lambda}{1 + 2\pi^2\lambda^2} ,$$

$$B = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 0 & 4\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & 2\pi & 1 \end{vmatrix} = -\frac{8\pi^2\lambda}{1 + 2\pi^2\lambda^2} ,$$

$$C = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\pi\lambda & -\pi\lambda & 2\pi \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{1 + 2\pi^2\lambda^2} .$$

Dans ces conditions, la solution est *unique* et s'écrit :

$$f(x) = \left(1 + \frac{2\pi^2\lambda^2}{1 + 2\pi^2\lambda^2}\right)x - \frac{8\pi^2\lambda^2}{1 + 2\pi^2\lambda^2} \sin x + \frac{2\pi\lambda}{1 + 2\pi^2\lambda^2} \cos x \quad (\lambda \neq \pm \frac{i}{\pi\sqrt{2}})$$

Si au contraire  $\lambda = \pm \frac{i}{\pi\sqrt{2}}$ , le système linéaire ci-dessus est d'ordre 2, l'une des équations étant combinaison linéaire des deux autres, entraînant que l'une des inconnues restera indéterminée. Ne retenant que les deux premières équations, on a  $A = \pi\lambda C = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}C$ ,  $B = -4\pi\lambda C = \mp 2i\sqrt{2}C$ . L'équation :

$$f(x) \mp \frac{i}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{+\pi} (x \cos x' + x'^2 \sin x + \cos x \sin x') f(x') dx' = x$$

a alors une *infinité* de solutions :

$$f_C(x) = \left(1 - \frac{C}{2\pi}\right)x + \frac{2C}{\pi} \sin x \pm i \frac{C}{\pi\sqrt{2}} \cos x \quad (\lambda = \pm \frac{i}{\pi\sqrt{2}}) , \quad (1.34)$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

La discussion de l'allure des solutions se fait aisément. Quand  $\lambda$  est réel (figure 1.1 à gauche), le graphe de  $f(x)$  est une droite (la première bissectrice) modulée par les lignes trigonométriques, l'amplitude des oscillations décroissant avec  $\lambda$  (si  $\lambda=0$ , la solution est trivialement  $f(x)=x$ ). Si  $\lambda$  est imaginaire pur, la partie imaginaire de  $f(x)$  est proportionnelle à  $\cos x$ , la partie réelle étant une ligne modulée (figure 1.1 à droite). Lorsque  $\lambda$  se rapproche des valeurs dangereuses  $\pm \frac{i}{\pi\sqrt{2}}$ , l'amplitude des oscillations devient de plus en plus grande, tout comme la pente de la contribution linéaire, pour diverger à la limite, d'où la dégénérescence de la solution, devenant (1.34). Supposant la constante  $C$  réelle, la partie réelle de  $f_C(x)$  retrouve l'allure d'une droite modulée, sa partie imaginaire étant à nouveau proportionnelle à  $\cos x$ .

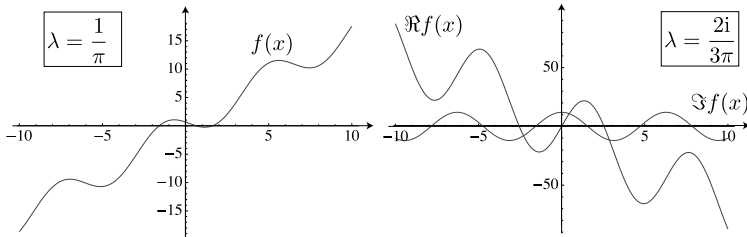


Figure 1.1: Graphe de la solution de l'équation (1.27) selon que le paramètre  $\lambda$  est réel (à gauche) ou imaginaire pur mais différent de  $\pm \frac{i}{\pi\sqrt{2}}$  (à droite).

On retiendra l'importance de la nature complexe ou réelle du paramètre  $\lambda$ , et en particulier le fait que, lorsqu'il est imaginaire pur, il existe des valeurs pour lesquelles, posée comme ci-dessus, l'équation a une *infinité* de solutions. Si un tel cas se présente dans une situation concrète, de deux choses l'une : ou bien le problème est mal posé (existence d'une petite partie réelle négligée), ou bien un grand principe (physique par exemple), toujours à l'œuvre en coulisse, doit être explicitement invoqué, ce qui peut se traduire par des conditions aux limites fixant le comportement asymptotique ou une certaine valeur en un point ; par exemple, si  $f(x)$  en  $x=0$  doit prendre une certaine valeur prescrite à l'avance, la constante  $C$  dans (1.34) se trouve *ipso facto* automatiquement fixée.

2. Pour l'équation de Fredholm de seconde espèce :

$$f(x) = \sigma(x) + \lambda \int_0^1 xx' f(x') dx' \tag{1.35}$$

les noyaux itérés sont :

$$K^{(1)}(x, x') = xx' \quad , \quad K^{(2)}(x, x') = \int_0^1 (xx'')(x''x') dx'' = \frac{xx'}{3} \quad ,$$

$$K^{(3)}(x, x') = \int_0^1 (xx'')(x''x') \frac{x''x'}{3} dx'' = \frac{xx'}{3^2} \quad , \dots \quad , \quad K^{(n)}(x, x') = \frac{xx'}{3^{n-1}} \quad ,$$



d'où  $\mathcal{N}(x, x'; \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, x') = \frac{3xx'}{3-\lambda}$ , qui converge à l'intérieur du disque inclus dans  $\mathbb{C}$  centré à l'origine et de rayon 3 ; il ne semble pas facile, au simple vu de l'équation, de pouvoir affirmer avant tout calcul que toutes les valeurs complexes  $|\lambda| = 3$  sont singulières, mais on peut en retrouver l'origine dans la condition générale  $|\int_a^b dx \int_a^b dx' K(x, x')|^2 < 1$ , qui prend ici la forme très simple :

$$|\lambda|^2 \left| \int_0^1 dx \int_0^1 dx' xx' \right|^2 \equiv \frac{1}{9} |\lambda|^2 < 1 ,$$

d'où la condition  $|\lambda| < 3$ .

Pour une source  $\sigma(x)$  donnée, la solution est donc :

$$f(x) = \sigma(x) + \frac{3\lambda x}{3-\lambda} \int_0^1 x' \sigma(x') dx' \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 3)$$

En particulier, pour une source constante  $\sigma_0$  :

$$f(x) = \sigma_0 \left[ 1 + \frac{3\lambda x}{2(3-\lambda)} \right] \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 3)$$

3. Pour l'équation de Fredholm de première espèce (1.28), on pose :

$$A \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\pi} \cos 2x' f(x') dx' , \quad B \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\pi} \cos^3 x' f(x') dx' ,$$

de sorte que  $f(x) = \lambda A \cos^2 x + \lambda B \cos 3x$ , expression qui, reportée dans les définitions de  $A$  et  $B$ , donne :

$$A = \lambda \int_0^{+\pi} \cos 2x' (A \cos^2 x' + B \cos 3x') dx' = \lambda \left( \frac{\pi}{4} \times A + 0 \times B \right) ,$$

$$B = \lambda \int_0^{+\pi} \cos^3 x' (A \cos^2 x' + B \cos 3x') dx' = \lambda \left( 0 \times A + \frac{\pi}{8} \times B \right) ,$$

d'où le système  $(1 - \lambda \frac{\pi}{4})A = 0$ ,  $(1 - \lambda \frac{\pi}{8})B = 0$ . Il ne possède solutions non triviales que si  $\lambda = \frac{4}{\pi}$ , auquel cas  $B = 0$  et  $A$  est arbitraire, ou  $\lambda = \frac{8}{\pi}$ , valeur associée à  $A = 0$  et  $B$  arbitraire :

$$\lambda = \lambda_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{4}{\pi} : f_{\lambda_1}(x) = C \cos^2 x ; \quad \lambda = \lambda_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{8}{\pi} : f_{\lambda_2}(x) = C \cos 3x$$

$C$  étant une constante arbitraire, inévitable puisque l'équation est homogène (si  $f$  est solution,  $Cf$  l'est aussi quelle que soit la constante  $C$ ).

Ces résultats peuvent clairement s'écrire sous la forme d'une équation aux valeurs et fonctions propres pour une matrice continue  $K(x, x')$  :

$$\int_0^{+\pi} K(x, x') f_{\lambda_i}(x') dx' = \lambda_i f_{\lambda_i}(x) , \quad K(x, x') = \cos^2 x \cos 2x' + \cos 3x \cos^3 x' ,$$

ou même, utilisant la notation de Dirac  $K(x, x') \equiv \langle x|K|x' \rangle$  et  $f(x) \equiv \langle x|f \rangle$  :

$$\forall x : \int_0^{+\pi} \langle x|K|x' \rangle \langle x'|f_{\lambda_i} \rangle dx' = \lambda \langle x|f_{\lambda_i} \rangle \iff K|f_{\lambda_i} \rangle = \lambda_i |f_{\lambda_i} \rangle .$$

4. L'équation (1.29) s'écrit :

$$f(x) = \lambda(3x - 2) \int_0^1 x' f(x') dx' \equiv \lambda(3x - 2) A ,$$

conduisant à l'égalité  $A = \int_0^1 x'(3x' - 2) A dx'$  soit, calculant l'intégrale,  $A = 0 \times A$  : l'équation n'admet donc que la solution identiquement nulle ; elle ne possède aucune valeur propre, aucun vecteur propre.

Plus généralement, avec :

$$f(x) - \lambda \int_0^1 (ax - 2)x' f(x') dx' = 0 ,$$

on a  $f(x) = \lambda(ax - 2) \int_0^1 x' f(x') dx' = \lambda(ax - 2) A$ , d'où la suite d'égalités :

$$A = \int_0^1 x' \lambda(ax' - 2) A dx' = \lambda \left( \frac{a}{3} - 1 \right) A .$$

Avec  $a \neq 3$ , il existe cette fois une (et une seule) valeur propre  $\lambda = \lambda_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{3}{a-3}$ , donnant la fonction propre :

$$\lambda = \lambda_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{3}{a-3} : f_{\lambda_1}(x) = C(ax - 2)$$

$C$  étant arbitraire (noter que  $a$  peut tout à fait être complexe).

5. L'équation :

$$\int_0^1 (\sqrt{x} x' - \alpha x \sqrt{x'}) f(x') dx' = \mu f(x)$$

montre que  $f(x) = \frac{1}{\mu} [\sqrt{x} A - \alpha x B]$  où  $A = \int_0^1 x' f(x') dx'$  et  $B = \int_0^1 \sqrt{x'} f(x') dx'$ , d'où les égalités :

$$A = \frac{1}{\mu} \int_0^1 x' [\sqrt{x'} A - \alpha x' B] dx' = \frac{1}{\mu} \left( \frac{2}{5} A - \frac{\alpha}{3} B \right) ,$$

$$B = \frac{1}{\mu} \int_0^1 \sqrt{x'} [\sqrt{x'} A - \alpha x' B] dx' = \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{2} A - \frac{2\alpha}{5} B \right) ,$$

conduisant au système homogène :

$$\left( \mu - \frac{2}{5} \right) A + \frac{\alpha}{3} B = 0 , \quad \frac{A}{2} - \left( \mu + \frac{2\alpha}{5} \right) B = 0 .$$

Le déterminant des inconnues est  $-(\mu - \frac{2}{5})(\mu + \frac{2\alpha}{5}) - \frac{\alpha}{6} = -\mu^2 - \frac{2}{5}(\alpha - 1)\mu - \frac{\alpha}{150}$ . S'il n'est pas nul, la seule solution est la solution triviale  $A = B = 0$  ; dans le cas contraire,  $\mu^2 + \frac{2}{5}(\alpha - 1)\mu + \frac{\alpha}{150} = 0$  donne les deux solutions :

$$\mu = \mu_{\pm}(\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{5} \left[ (1 - \alpha) \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{6\alpha^2 - 13\alpha + 6} \right] .$$

Lorsque  $\alpha$  est réel, les  $\mu_{\pm}$  sont aussi réels si  $\alpha < \alpha_- \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2}{3}$  ou si  $\alpha > \alpha_+ \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{3}{2}$ . Sinon, les deux fonctions  $\mu_{\pm}(\alpha)$  sont complexes conjuguées l'une de l'autre (voir figure 1.2) ; c'est notamment le cas lorsque  $\alpha = 1$  (alors le noyau est symétrique) :

$$\mu_{\pm}(1) = \pm \frac{i}{5\sqrt{6}} .$$

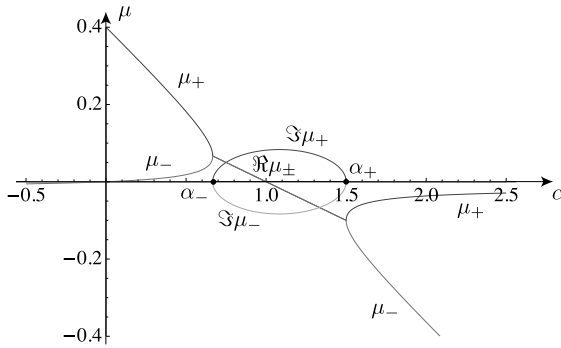


Figure 1.2: Variation en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}$  des valeurs propres  $\mu_{\pm}(\alpha)$  pour lesquelles l'équation homogène (1.31) possède des solutions autres que la solution triviale.  $\mu_{\pm}$  est réel si  $\alpha < \alpha_- = \frac{2}{3}$  ou si  $\alpha > \alpha_+ = \frac{3}{2}$  ; dans l'intervalle  $[\alpha_-, \alpha_+]$ ,  $\mu$  est complexe ( $\mu_- = \mu_+^*$ ).

$\mu$  étant choisi égal à  $\mu_+(\alpha)$  ou  $\mu_-(\alpha)$ , la solution est  $f_{\pm}(x) = \frac{A}{\mu_{\pm}} [\sqrt{x} - \alpha \frac{B}{A} x]$ , soit :

$$f_{\pm}(x) = A \frac{5\sqrt{6} - [\sqrt{6}(1 + \alpha) \pm \sqrt{6\alpha^2 - 13\alpha + 6}] \sqrt{x}}{\sqrt{6}(1 - \alpha) \pm \sqrt{6\alpha^2 - 13\alpha + 6}} \sqrt{x}$$

où  $A$  est une constante arbitraire. Lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , on trouve  $f_+(x) \rightarrow \frac{5}{2} \sqrt{x}$ , qui est trivialement la solution de l'équation de départ avec  $\alpha = 0$  cependant que  $f_-(x) \rightarrow \infty$  puisque  $\mu_- \rightarrow 0$ .

## 1.14 Équation de Volterra

1. Trouver les résolvantes  $\Gamma(x, x'; \lambda)$  des équations de Volterra de seconde espèce dont les noyaux sont :

$$K(x, x') = 1 , \quad K(x, x') = x - x' , \quad K(x, x') = e^{x^2 - x'^2} . \quad (1.36)$$

2. Quelle est la solution de l'équation :

$$f(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-x'} e^{x^2-x'^2} f(x') dx' ? \quad (1.37)$$

===== ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? i ? =====

1. L'équation de Volterra de seconde espèce est :

$$f(x) = \sigma(x) + \lambda \int_a^x K(x, x') f(x') dx' . \quad (1.38)$$

Les noyaux itérés sont  $K^{(1)}(x, x') = K(x, x')$ , et généralement :

$$K^{(n+1)}(x, x') = \int_{x'}^x K(x, x'') K^{(n)}(x'', x') dx'' \quad (n \in \mathbb{N}^*) .$$

Avec  $K(x, x') = 1$ , on a  $K^{(1)}(x, x') = 1$  puis :

$$K^{(2)}(x, x') = \int_{x'}^x 1 \cdot 1 dx'' = x - x' , \quad K^{(3)}(x, x') = \int_{x'}^x 1 \cdot (x'' - x') dx'' = \frac{(x - x')^2}{2!}$$

et ainsi de suite :  $K^{(n)}(x, x') = \frac{(x-x')^{n-1}}{(n-1)!}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le noyau résolvant  $\Gamma(x, x'; \lambda)$  est la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^{n-1} K^{(n)}(x, x')$  soit ici :

$$\Gamma(x, x'; \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^{n-1} \frac{(x - x')^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\lambda(x-x')}$$

série qui converge quels que soient  $x$  et  $x'$ .

Avec  $K(x, x') = x - x'$ , on a  $K^{(1)}(x, x') = x - x'$ , puis :

$$K^{(2)}(x, x') = \int_{x'}^x (x - x'')(x'' - x') dx'' = \frac{1}{6}(x - x')^3 ,$$

$$K^{(3)}(x, x') = \int_{x'}^x (x - x'') \frac{1}{6}(x'' - x')^3 dx'' = \frac{1}{5!}(x - x')^5$$

Par récurrence, on établit sans peine que  $K^{(n)}(x, x') = \frac{1}{(2n-1)!}(x - x')^{(2n-1)}$ , donnant :

$$\Gamma(x, x'; \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} (x - x')^{2n-1} = \lambda^{-1/2} \sinh[\lambda^{1/2}(x - x')]$$

Enfin, avec  $K(x, x') = e^{x^2-x'^2}$ , on a  $K^{(1)}(x, x') = e^{x^2-x'^2}$  puis :

$$K^{(2)}(x, x') = \int_{x'}^x e^{x^2-x''^2} e^{x''^2-x'^2} dx'' = (x - x') e^{x^2-x'^2} ,$$

$$K^{(3)}(x, x') = \int_{x'}^x e^{x^2-x''/2} (x'' - x') e^{x''/2-x'^2} dx'' = \frac{1}{2!} (x - x')^2 e^{x^2-x'^2},$$

et ainsi de suite, de sorte que :

$$\Gamma(x, x'; \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (x - x')^{n-1} e^{x^2-x'^2} = e^{\lambda(x-x')} e^{x^2-x'^2}$$

2. Avec  $K(x, x') = e^{x-x'+x^2-x'^2}$ , on a  $K^{(1)}(x, x') = e^{x-x'+x^2-x'^2}$  puis :

$$K^{(2)}(x, x') = \int_{x'}^x e^{x-x''+x^2-x''/2} e^{x''-x'+x''/2-x'^2} dx'' = (x - x') e^{x-x'+x^2-x'^2},$$

$$K^{(3)}(x, x') = \int_{x'}^x e^{x-x''+x^2-x''/2} (x'' - x') e^{x''-x'+x''/2-x'^2} dx'' = \frac{1}{2!} (x - x')^2 e^{x-x'+x^2-x'^2},$$

et ainsi de suite, de sorte que (ici  $\lambda = 1$ ) :

$$\Gamma(x, x'; 1) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(x - x')^{n-1}}{(n-1)!} e^{x-x'+x^2-x'^2} = e^{2(x-x')} e^{x^2-x'^2}.$$

Une fois trouvé le noyau résolvant de (1.38), la solution s'écrit :

$$f(x) = \sigma(x) + \lambda \int_a^x \Gamma(x, x'; \lambda) \sigma(x') dx';$$

l'équation proposée, (1.37), étant de ce type (avec  $\lambda = 1$ ,  $a = 0$  et  $\sigma(x) = e^{x^2}$ ), sa solution est :

$$f(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{2(x-x')} e^{x^2-x'^2} e^{x'^2} dx' = e^{x^2} + e^{x^2+2x} \frac{1}{2} (1 - e^{-2x}),$$

d'où l'unique solution de (1.37) :

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} (1 + e^{2x})$$



# Index

$\aleph_0$ , 144  
 $\aleph_1$ , 144  
 $\infty_{\mathbb{C}}$ , 141, 144

## A

accélérateur de convergence, 103  
*antikink*, 751  
application logistique, 944  
arc simple de Jordan, 185  
assez bonne fonction, 609, 610  
associativité, 1–3, 621, 872, 886, 888  
astroïde, 676

## B

barrière  
  absorbante, 725  
  d'énergie, 453  
  parfaitement  
    absorbante, 716, 722, 723  
    réfléchissante, 712, 713, 722–725  
base orthonormée, 17, 19, 20, 22, 146, 488, 880,  
  883, 890, 895, 900  
bifurcation, 904, 906, 923–926  
brisure de symétrie, 597, 745, 926

## C

caractéristiques (courbes), 737, 738  
cercle unité  $\partial\mathcal{D}_1$ , 276  
changement de base, 20  
coefficient  
  de diffusivité thermique, 493  
  de Fourier, 470, 471, 480, 483  
commutateur, 21  
commutativité, 1, 154, 194  
complément orthogonal, 14  
composantes, 15, 18, 20–22, 24, 516, 886, 888,  
  897  
  contravariantes, 6  
  irréductibles, 895, 898  
condition  
  de Lipschitz, 658  
  de Vitali, 488  
  initiale, 698, 699, 701, 702, 712, 713  
conditions  
  aux limites, 464–466, 712, 713, 726

  cycliques de Born - von Kármán, 902  
  de Cauchy - Riemann, 162, 174, 175, 211,  
    238, 239, 460, 464  
  de Dirichlet, 732, 733  
  de raccordement, 695  
  initiales, 540, 570, 571, 646, 652, 687, 690,  
    695, 734  
constante  
  d'Euler, 83, 92, 395, 407, 409, 412, 414,  
    416, 417, 525, 527, 820, 822  
  de Catalan, 76  
convergence  
  absolue, 100, 117, 224, 398, 484, 790  
  simple, 575  
  stochastique, 852  
  uniforme, 58, 197, 215, 222, 223, 267, 332,  
    341, 356, 419, 791, 792  
convolution, 568, 570  
  de  $J_0$  et  $J_0$ , 556  
  de  $t^p$  et  $t^q$ , 557  
  de Bernoulli, 856  
coordonnées hypersphériques, 516, 518  
corde vibrante, 732  
  amortie, 734–736  
corps, 4, 6, 9, 14, 28, 152, 153, 888, 889  
  des complexes, 14  
  des quaternions, 889  
  des réels, 28  
  ordonné, 3, 4  
coupure, 167, 169–171, 189, 237, 238, 242, 244,  
  245, 251, 253, 261, 314, 316, 317,  
  334, 335, 339, 342–347, 349, 357, 358,  
  360, 366, 368, 441, 444, 445, 457,  
  534, 536, 538, 552, 553, 558, 578,  
  595, 606, 660, 662, 717, 749, 772  
courant, 702, 712, 713, 716, 720, 721, 723  
couronne, 218, 219, 221, 224, 225, 232, 272, 370,  
  448, 450  
cumulants, 841, 842  
  de la distribution  
    de Cantor, 848  
    de Gumbel, 822  
    de Poisson, 842  
    Gamma, 842  
cycle  
  -limite, 160, 161, 911–913, 922  
  semi-stable, 911, 922, 923

## D

- décomposition en éléments simples, 92, 94, 107, 113, 203, 219, 220, 249, 258, 278, 300, 376, 388, 920
- densité de probabilité, 804–806, 825, 856
  - conjointe, 828
  - marginale, 580
  - de la loi Gamma, 812, 861, 862
- dérivée
  - fractionnaire, 620, 622
  - logarithmique, 789, 792
- description à la Landau des phénomènes critiques, 452
- déterminant
  - de Gram - Schmidt, 28
  - de van der Monde, 26, 28
- développement
  - asymptotique, 445
  - de Laurent, 50, 183, 218, 219, 221–223, 231, 240, 264, 272, 289, 370, 376, 382, 448, 450, 639, 662
  - de Mittag-Leffler, 180, 270, 286, 396, 420, 547
  - de Taylor, 50, 104, 111, 112, 222, 226, 231, 241, 243, 329, 388, 389, 441, 448, 450, 463, 552, 617, 842, 844, 846
- diffusion
  - avec des murs
    - absorbants, 722
    - réfléchissants, 722
  - confinée, 712, 713, 722
  - sur  $\mathbb{R}_+$ , 712
- distance
  - cordale, 162, 163, 166
  - homofocale, 151
- distribution
  - $(1 - x^2)_+^z$ , 627–629
  - $\delta'(1 - x^2)$ , 616, 617
  - $\delta'(u(x))$ , 615
  - $\delta(1 - x^2)$ , 614, 616
  - $\delta(u(x))$ , 614
  - $x_+^z$ , 617, 620–624, 626, 628, 639, 641, 644
  - $x_+^z e^{-\varepsilon x}$ , 625
  - de Dirac, 270, 284, 510, 612, 614, 616, 695, 706
  - marginale, 828, 829
- domaine, 185, 186
  - simplement connexe, 189, 195, 196, 222, 246, 249, 353
- droite de Bromwich, 536, 538, 571, 578, 595, 606, 717

## E

- écart-type, 804, 812, 826, 828, 856
- effet papillon, 90, 688, 903, 908
- égalité
  - de Bessel - Parseval - Plancherel, 489

- de Cauchy, 620, 622
  - de Lagrange, 142
  - énergie libre, 452, 454, 455
    - d'excès, 453
  - ensemble de Julia, 944, 945
  - entiers de Gauss, 154
  - équation
    - autonome, 654
    - aux différences finies, 543, 544
      - non-linéaire, 687, 688
    - caractéristique, 10, 13, 19, 154
    - d'Abel, 29–31
    - d'Airy, 667–669, 741
    - de Bernoulli, 677, 678
    - de Bessel, 663, 665, 672
    - de Black - Scholes, 709
    - de Clairaut, 676
    - de conservation, 539, 584, 702, 703, 707–709, 713, 744
    - de Fredholm, 33
      - de première espèce, 35–37
      - de seconde espèce, 31, 32, 34
    - de la chaleur, 493, 709, 710, 725, 726
    - de la diffusion
      - avec des murs absorbants ou rayonnants, 722
      - avec source, 727
    - de Langevin, 559
    - de Sturm - Liouville, 672
    - de transport, 514, 701–709
    - de Vlasov, 580, 585
      - linéarisée, 580, 582, 585, 588
    - de Volterra, 673
      - de seconde espèce, 37–39, 673, 674
  - différentielle, 698, 699
    - homogène, 646, 653, 670, 679, 680
    - non-linéaire, 681
  - elliptique, 738
  - hyperbolique, 730, 738
  - parabolique, 498, 738
  - quasi-linéaire, 729, 730
- espace
  - des phases, 932, 936
    - étendu, 932, 936
  - euclidien, 28
  - réciproque, 23
  - symplectique, 884, 885
- exposant de Lyapounov, 939, 942, 944

## F

- facteur de pseudo-périodicité, 788, 791
- ferromagnétique, 452
- feuille de Riemann, 596
- Floquet, Achille Marie Gaston, 682
- fonction
  - analytique, 50, 112, 202, 207, 208, 213, 214, 216, 226, 258, 367, 370, 407,



- 449, 453, 456, 509, 568, 590, 660–662, 668, 702, 704, 708, 770, 790
- caractéristique, 801, 802, 804, 805, 807–809, 811, 812, 814, 816, 818, 820, 821, 823, 824, 826, 829, 831, 833, 837, 839, 842, 843, 846, 847, 850, 851, 858, 863
- de Cantor, 117, 121, 846
- de Cauchy, 839, 842
- de la loi de Gumbel, 820, 821
- de la loi Gamma, 805, 812, 816
- de Poisson, 837, 839, 842
- concave, 62, 64
- convexe, 61
- cosinus intégral Ci, 447
- d'Euler
- de deuxième espèce  $\Gamma(z)$ , 207, 277, 334, 393, 394, 396, 401, 565
  - de première espèce  $B(p, q)$ , 118, 207, 337, 342, 356, 400, 564, 774, 782
- de Cantor, 117, 121, 846
- de coupure, 432, 554, 579
- de Green, 539, 645, 691–696, 722, 725, 752 retardée, 728
- de Heaviside, 464, 543, 613
- de Kummer, 768
- de répartition, 808–810, 814, 815, 826, 828, 829, 832, 834
- de Riemann  $\zeta(z)$ , 79, 132, 139, 277, 370, 425, 429, 473, 501, 618
- de Riemann généralisée  $\zeta(z, a)$ , 365
- digamma  $\psi(z)$ , 820, 822
- échelon-unité, 124
- elliptique, 157, 791
- elliptique complète
- de première espèce, 401, 403
  - de seconde espèce, 401, 403
- en dent de scie égoïne, 481
- en escalier (étagée), 54, 546–548, 551, 834
- entière, 111, 120
- erreur  $\operatorname{erf}(x)$ , 525, 527, 606, 675, 686, 698–700, 816, 817
- erreur complémentaire  $\operatorname{erfc}(x)$ , 699, 700
- exponentielle intégrale  $\operatorname{Ei}(x)$ , 83
- génératrice
- des cumulants, 820, 822, 839, 842
  - des polynômes de Legendre, 206, 207
- Gamma incomplète  $\Gamma(\alpha, x)$ , 58, 564
- harmonique, 178, 390, 459, 460, 464
- holomorphe, 112, 148, 171–176, 178, 180, 187, 188, 191, 192, 195, 196, 201–203, 205, 212–215, 219, 226, 227, 230–232, 239, 245, 247–249, 252, 261, 293, 313, 325, 339, 344, 353, 358, 370, 371, 390, 450, 460, 466, 567, 571, 572, 590, 598, 699
- homogène, 653
- hypergéométrique, 766, 767
- confluente (dégénérée), 768, 780
- logarithme intégral,  $\operatorname{li}(x)$ , 123, 127
- méromorphe, 180, 270, 277, 286, 304, 308, 311, 341, 367, 370, 378, 383, 385, 635
- multiforme, 143, 167, 171, 206, 248, 302, 334, 339, 345, 357, 364, 366, 400, 578, 595, 599–601, 603
- partie entière, 501, 572, 573
- polylogarithme, 804
- porte, 355
- signe  $\operatorname{sgn} x$ , 44, 81, 242, 243, 269, 281–283, 287, 290, 303, 348, 391, 513, 514, 532, 579, 704, 707, 709, 719, 730
- sinus cardinal  $\operatorname{sinc} t = \frac{\sin t}{t}$ , 850, 858
- sinus intégral Si, 80, 447, 530–532
- transcendante de Lerch, 110
- fonctionnelle, 632, 639
- $(1 - x^2)_+^z$ , 628, 631
  - $r^z$ , 641, 644
  - $x_+^z$ , 617, 619, 620, 639
  - $x_+^z e^{-\varepsilon x}$ , 625
- analytique, 621
- singulière, 639
- fonctions
- de Bessel, 231, 555, 556, 568, 628, 629, 738, 770
  - de Jacobi  $\vartheta_\alpha(z, q)$ , 783, 784
- forme
- canonique d'une EDP, 737, 738
  - diagonalisable, 28
- formule
- d'addition (fonctions de Bessel), 881
  - d'Euler, 123, 125, 199, 289, 405, 406 généralisée, 13
  - d'interpolation de Hermite, 372
  - d'inversion
    - de Laplace, 533–538, 540, 542, 543, 545, 556–558, 572, 574, 577, 578, 590, 595, 600, 603, 604  - de Binet, 544, 548, 549
  - de Cauchy, 195, 196, 198, 199, 203–205, 208, 211, 212, 253, 254, 374, 391, 756–758
  - de doublement
    - pour  $\Gamma(z)$ , 209, 401, 403, 427
    - pour  $\psi(z)$ , 414, 420  - de la moyenne, 203, 204
    - de Gauss, 203  - de Laplace, 205
  - de Laurent, 220
  - de Leibniz, 41, 44, 45, 181, 228, 243, 326, 327, 373, 374, 442, 444, 609, 635, 741, 756, 758, 759, 766, 794
  - de Liouville, 670, 672
  - de Moivre, 132, 138
  - de Poisson, 330
  - de Rodrigues, 204, 208, 209, 756, 758, 759 généralisée, 755

de Schläfli, 205  
 de sommation (sommatoire)  
   d'Abel, 53  
   d'Euler, 408, 409  
   de Poisson, 334, 426  
 de Stirling, 60, 88, 407, 411, 855  
 des compléments, 29, 30, 335, 342, 347,  
   400–404, 411, 672, 770, 773, 783  
 du binôme, 198  
 intégrale de Poisson pour le demi-plan su-  
   périeur, 390, 391, 464, 465  
 fraction rationnelle, 94, 113, 178–180, 183, 189,  
   227, 250, 255, 258, 278, 292, 300,  
   325, 379, 573, 581, 586, 714, 920, 922  
 frontière essentielle, 255, 259  
 frottement fluide, 559, 560, 679

## G

groupe  
    $C_{2v}$ , 895  
   abélien (commutatif), 872, 876, 891, 895,  
     896, 899, 900  
   cyclique (monogène), 873  
   des déplacements plans, 879, 881  
   des quaternions, 888  
   symplectique, 884, 885

## H

homogénéité, 51, 55, 182, 221, 231, 302, 326,  
   346, 352, 520, 571, 625, 643, 744,  
   782, 825  
 hybridation  
    $sp^2$ , 890–894  
   d'orbitales atomiques, 890

## I

idempotence, 14  
 indépendance linéaire, 5, 6, 8, 14, 18  
 inégalité  
   arithmético-géométrique de Gauss, 62, 64  
   de Jensen, 61  
   intégrale de van der Corput, 157–160  
 instabilité  
   (amortissement) de Landau, 580, 584  
   d'un point fixe, 549, 907, 908, 919, 922,  
     941, 944  
   numérique, 930, 944  
 intégrale  
   de Dirichlet, 243, 283, 284, 322, 398, 575  
   de Fourier, 326  
   de Fresnel, 262, 397, 399, 528, 750  
   de Poisson, 557  
   de Raabe, 401, 404  
     généralisée, 402, 405  
   de Sonine - Gegenbauer, 778, 780  
   de Wallis, 116, 118, 199

de Watson, 869  
 de Weber, 777  
   gaussienne, 331, 332  
   uniformément convergente, 242  
 invariance modulaire, 334, 783, 786  
 inversion (géométrie), 165  
 isomorphisme, 14, 145, 146, 152–154, 873, 874,  
   877, 878, 890

## J

Jacobien, 214, 215, 516–518, 642, 643

## K

*kink*, 751

## L

Laplacien, 459, 460  
 lemme  
   de Jordan, 241, 249, 280, 291, 298, 306,  
     314–317, 325, 327, 382, 443, 500, 508,  
     534  
   de réarrangement, 891  
 lemniscate de Bernoulli, 147, 150  
 limite visqueuse, 713  
 loi  
   -puissance, 552–554, 562–564, 579, 580,  
     604–606  
   binomiale, 861  
   de Cauchy (lorentzienne), 807  
   de composition interne (LCI), 1  
   de Fick, 713  
   de Gauss, 839, 842  
   de Gumbel, 820  
   de Maxwell, 816  
   de Pareto, 814, 815  
   de Poisson, 823, 824, 837, 839, 842, 860–  
     862  
   Gamma, 805, 812, 816, 839, 842, 861, 862  
   infiniment divisible, 805, 807  
   large, 803  
 longueur d'écran, 512

## M

marche au hasard, 832, 834, 839  
 matrice  
   antisymétrique, 884  
   continue (noyau), 35  
   de passage, 18, 20, 21  
   de rotation, 22, 24, 25  
   diagonalisable, 14, 17, 18, 146, 683  
   hermitique, 9, 10, 13, 16, 20  
   non diagonalisable, 18  
   régulière, 15, 872, 875, 885, 886  
   symétrique, 14, 18, 20  
   symplectique, 884, 886  
   triangulaire, 15

unitaire, 17  
 mesure d'intégration, 6  
 méthode  
 de Césaro, 88  
 de Fuchs, 663–665  
 de variation de la constante, 646, 647, 655  
 des caractéristiques, 702, 707, 737  
 du col, 436–440, 443, 444, 453, 458  
 métrique antisymétrique, 884  
 mode plasma, 581, 585–587  
 moments, 841

## N

nombre d'or (*golden mean*), 544, 545, 550  
 nombres  
 de Bernoulli, 229, 448–450  
 harmoniques, 97, 98, 415  
 hypercomplexes, 887  
 noyau (intégral), 31, 34, 37–39, 320, 560–562,  
 564, 594, 597, 598, 673, 728

## O

opérateur  
 de translation, 899, 900  
 hermitique, 724  
 idempotent, 14  
 orbitales hybrides  $sp^2$ , 894

## P

partie  
 entière (régulière), 219, 221, 224, 376  
 finie de Hadamard, 128  
 imaginaire d'énergie libre, 453  
 principale, 183, 194, 219, 221–224, 226,  
 306, 314, 633  
 de Cauchy, 79, 80, 83, 128, 129, 190,  
 248, 254, 273, 296, 297, 310, 315,  
 327, 357, 584, 591  
 peigne de Dirac  $\text{III}(x)$ , 786, 899, 901, 932  
 pendule  
 isochrone de Huyghens, 31  
 simple, 42, 47  
 période du pendule simple, 42, 47  
 perturbation singulière, 49, 50  
 phénomène de Gibbs, 473, 475  
 plasma, 580, 581  
 poids, 6  
 point  
 de branchement, 228, 232, 234, 238, 243,  
 244, 246, 248, 302, 316, 317, 339,  
 341–346, 349, 351, 355, 358, 364, 456–  
 458, 530, 533, 534, 536, 538, 539,  
 553, 554, 558, 595, 660, 662, 717  
 fixe, 904, 906, 910, 912, 916, 917, 923, 924,  
 929, 930

point singulier  
 irrégulier, 660, 661, 663, 666  
 à l'infini, 668  
 régulier, 661, 662, 664  
 à l'infini, 660, 661  
 pôle, 50, 270, 286, 382  
 d'ordre  $n$ , 221, 227, 228  
 double, 182, 221, 228, 230, 324, 378, 387,  
 541  
 simple, 182, 223, 228, 235, 236, 249, 280,  
 324, 325, 350, 357, 372, 377, 387,  
 504, 545, 621, 622  
 polyènes, 890  
 polynôme caractéristique, 10, 12, 13, 154  
 polynômes  
 de Hermite, 758, 760, 763, 765, 766  
 de Jacobi, 758, 763, 765, 766  
 de Laguerre, 575, 576, 759, 761, 763, 765,  
 766  
 de Legendre, 204–208, 756–760, 763, 765  
 orthogonaux, 6  
 porosité d'une frontière essentielle, 259  
 portrait de phase, 903, 904, 908, 932  
 potentiel de Yukawa, 511  
 poussière de Cantor, 846, 848  
 primitive fractionnaire, 620, 622  
 principe  
 de causalité, 281, 561, 696, 697  
 de réflexion de Schwarz, 262, 533, 595  
 problème  
 de Cauchy, 729, 730  
 de Dirichlet, 465, 466  
 de Sturm - Liouville, 672  
 produit  
 d'Euler, 859  
 infini, 116, 118–121, 160  
 de Jacobi pour les  $\vartheta_\alpha(z, q)$ , 788, 790  
 mixte, 21, 22  
 scalaire, 5, 6, 488, 724, 884, 889, 899, 900  
 hermitien, 7, 890, 893  
 vectoriel, 889  
 projecteur, 14, 892, 899–901  
 de symétrie, 892, 899–901  
 prolongement  
 analytique, 115, 205, 206, 214, 253, 254,  
 256, 257, 260, 261, 288, 293, 306,  
 308, 311, 341, 347, 349, 365, 371,  
 398, 407, 410, 453, 457, 501, 504,  
 507, 532, 556, 583, 590, 618, 619,  
 621, 628, 631–633, 642, 661, 747, 748  
 de  $\zeta(z)$ , 502, 505  
 par continuité, 112, 169–171, 218, 234, 243–  
 245, 304, 576  
 propagateur, 682–685  
 pulsation plasma, 581, 586, 590

## Q

quaternions, 13, 886–890

## R

ralentissement critique, 596, 605

rayon de convergence, 114, 196, 197, 457, 660, 661, 664, 667

régularisation

d'Euler, 274, 276, 287, 301

d'une intégrale, 83, 127, 128, 130, 245, 248, 254, 297, 617–619

d'une série, 274, 287

du potentiel Coulombien, 511

relation

de Bessel - Parseval - Plancherel, 473, 477, 486

de Bragg, 140

de dispersion, 495, 497, 581, 584, 586, 587, 590, 592, 593, 753

de Legendre, 414

de récurrence des polynômes orthogonaux, 755, 761

entre moments et cumulants, 841

fonctionnelle, 117, 121, 331, 346, 394, 395, 683–685, 877

de  $\Gamma(z)$ , 403, 412, 415

de  $\psi(z)$ , 412, 415

de  $\zeta(z)$ , 367, 370, 425, 427, 501, 502, 505, 507

de Kummer, 780

du logarithme, 61

relations

de Kramers - Kronig, 371

de Legendre pour les intégrales elliptiques, 798

relaxation brisée, 594

renormalisation, 593

réseau de Bravais, 682, 684

résidu, 218, 221, 226–231, 233, 235–238, 241, 247, 254, 264, 270, 271, 279–282, 285, 286, 288, 289, 291, 293, 297, 304, 306, 310, 319, 324, 326, 327, 329–331, 345, 350, 354, 356, 359, 363, 367, 368, 370, 377–380, 382, 383, 386–389, 442, 444, 449, 451, 500, 508, 509, 533, 545, 552, 553, 574, 577, 593, 622, 623, 631, 633, 635, 642, 644, 859

de  $(1 - x^2)_+^z$ , 628

de  $\Gamma(z)$ , 623

de  $r^z$ , 642

de  $x_+^z$ , 644

en un pôle

d'ordre  $n$ , 221, 227, 228, 327, 376, 442, 577

double, 230, 324, 378, 387

triple, 378, 388, 389

résolvante, 17, 37

rotation, 15, 20–22, 24, 146, 147, 258, 511, 872–874, 879, 890–893, 895, 897, 902

hyperbolique, 878, 879

## S

Second Principe, 720

sensibilité aux conditions initiales, 90, 688, 903, 908

série, 213

$C(1)$ -sommable, 88

absolument convergente, 84, 85, 108, 117, 222, 259, 335, 471, 484

convergente, 84, 87, 494

d'Euler, 667

de Fourier, 105, 106, 109, 215, 469–474, 476, 477, 480–484, 486, 490, 492, 493, 497, 499, 502, 506, 538, 543, 546, 547, 573, 574, 726, 736, 843, 845

de Fuchs, 663, 666

de Gauss, 109

de Laurent, 376

de Taylor, 110–112

divergente, 84, 87, 274, 300

géométrique, 12, 16, 17, 87, 90, 105, 112, 118, 216, 219, 222, 223, 255, 257, 275, 296, 332, 428, 470, 478, 479, 525, 574, 810, 849

harmonique, 96

alternée, 486

majorable, 107, 109, 214, 474, 482, 484

trigonométrique, 470, 472–474

uniformément convergente, 214, 224, 482, 484, 501, 506

singularité

apparente (éliminable), 182, 234, 236, 320

essentielle, 112, 221, 226, 229, 236, 238, 306, 352, 530, 593, 662, 915

isolée, 236, 253, 264, 278, 286, 307

non isolée, 236

sous-corps, 3, 4

sous-espace

isotrope, 884, 885

vectorel, 4–6, 14

sous-groupe

impropre, 873

propre, 873

sphère

de Riemann, 141, 162–164

unité, 163, 516, 518, 643, 889

stabilité

d'un point fixe, 549, 904, 907, 910, 913, 918, 920, 925, 927, 930, 939, 941

d'une loi de composition, 4, 14

d'une loi de probabilité, 806

linéaire, 904, 910, 911, 916, 920, 922, 925–927, 939

numérique, 890, 944

suite

- de Fibonacci, 543, 544, 548
- de fonctions, 7, 65, 122, 125, 144, 355, 514, 524, 612, 613, 616, 658, 847
- de Lucas, 548
- logistique, 945
- numérique, 65–68, 70, 72–75, 84, 85, 89, 90, 92, 110, 111, 122, 275, 305, 350, 383, 384, 685–688, 690, 916, 917, 927, 931, 933, 937
  - aléatoire, 808, 809
- supraconductivité, 312, 366
- symbole  $q$  de Pochhammer, 118
- symétrie
  - axiale, 894
  - brisée, 597, 745, 926
  - d'un triangle équilatéral, 872, 874
  - d'une table de composition, 891
  - de réflexion, 464
  - de translation, 582, 899, 900
  - dynamique, 522
  - gauche - droite, 745
  - miroir, 164, 166, 868
  - radiale, 167
  - sphérique, 511, 516, 519, 892

## T

théorème

- d'Abel, 217, 274, 485
- d'addition
  - de Graf, 881, 884
  - des fonctions de Bessel, 880
- d'Efros, 557, 559, 605
- de Bloch, 682, 684
- de Cauchy, 188, 199, 250, 261, 279, 304, 324, 353, 446, 457, 500, 595, 598, 599, 625–627, 749
- de Cayley - Hamilton, 9, 10, 12–14, 19, 154, 885
- de convergence dominée, 122, 125, 242
- de convolution, 557, 561, 600
- de développement, 558
- de Floquet, 682, 684
- de Fubini, 261, 623, 624
- de Gell-Mann et Low, 672
- de Lagrange, 873, 895, 896
- de Laurent, 223
- de Liouville, 111, 201, 202, 791
- de Marcinkiewicz, 839, 842
- de translation, 701, 703
- des nombres premiers, 507
- des résidus, 135, 190, 195, 213, 240, 241, 246–248, 250, 253, 254, 265, 269, 271, 273, 274, 276, 278, 279, 281, 283, 287, 289, 292, 293, 298–300, 304, 306, 308, 310, 313, 315, 317, 319, 320,

- 325, 329–331, 336–338, 346, 347, 350–357, 360, 365, 377, 380, 387, 443, 450, 499, 509, 513, 533, 534, 537, 541–543, 545, 552, 553, 557, 571, 573, 574, 595, 604, 807, 808
- du prolongement analytique, 115, 218, 254, 261, 262, 266, 267, 293, 308, 365, 504, 505, 507
- fondamental
  - de l'algèbre, 135, 140, 179, 183, 328
  - du calcul intégral, 31, 50, 126, 763
  - limite central (TLC), 808, 852, 855
- trace, 9, 13, 682, 898
- transformée
  - de Fourier, 508, 513, 514, 620, 844
  - d'une fonction discontinue, 512, 513
  - de  $(1 - x^2)_\pm^2$ , 628, 636
  - de  $x_\pm^2 e^{-\varepsilon x}$ , 625, 627
  - de la gaussienne, 499, 500
  - des distributions  $x_\pm^2$ , 625
  - du potentiel Coulombien, 512, 585
  - du potentiel de Yukawa, 511
  - de Laplace, 525–528, 532, 540, 543, 560, 561, 563, 566, 567, 576, 698, 700–702, 747, 825, 826, 835
  - d'une fonction périodique, 523, 538
  - de  $1 - \operatorname{erf}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{t}})$ , 537
  - de  $\cos \gamma t$ , 534
  - de  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ , 570
  - de  $\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}$ , 539
  - de  $\frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})$ , 525, 526
  - de  $\frac{1}{t}f(t)$ , 524
  - de  $\frac{2}{t}(1 - \cos \gamma t)$ , 535
  - de  $\ln t$ , 525, 527
  - de  $tf(t)$ , 523
  - de  $Y(t)t^\alpha$ , 529, 557, 565
  - de  $\operatorname{erf}(x)$ , 527
  - de la fonction  $Y(t)q^{E(t)}$ , 572, 573
  - de la fonction de Bessel  $J_0$ , 568, 569
  - de la fonction de Bessel  $Y_0$ , 569
  - de la fonction partie entière  $E(t)$ , 550, 551
    - du produit  $tf'(t)$ , 531, 532
    - du sinus intégral  $\operatorname{Si}(t)$ , 530, 531, 533
    - et équation de transport, 701
    - et comportement asymptotique, 578
- transformation
  - conforme, 459, 465, 466, 499
  - d'Euler, 103
  - d'une couronne coupée en rectangle, 460, 461
  - de Cole - Hopf, 744
  - de Fourier, 512, 620, 702
    - et équation aux dérivées partielles, 514
    - et équation différentielle, 507
    - inverse, 521

de Joukovsky, 150, 462  
 de Laplace, 31, 523, 541, 564, 566, 567,  
 569, 589, 698, 699, 702, 712–714, 721  
 et équation différentielle, 540, 568  
 et polynômes de Laguerre, 575  
 et variable aléatoire, 824  
 inverse, 345, 363, 543  
 du boulanger, 939  
 homographe, 347  
 orthogonale, 25, 28  
 unitaire, 20  
 transition  
 de phase, 452  
 ferromagnétique, 452  
 translation, 879, 899, 900  
 triangle de Pascal, 11

## U - V

valeur propre, 10, 13, 16, 18, 19, 32, 35–37, 320,  
 683, 885, 899–901  
 variance (écart quadratique moyen), 808, 846,  
 848, 852  
 vecteur  
 isotrope, 884, 885  
 propre, 10, 14, 16–18, 20, 36, 146  
 de l'opérateur de translation, 900  
 normalisé, 20  
 unitaire, 5, 24, 891  
 vitesse  
 angulaire, 925  
 de dérive, 585  
 de groupe, 581, 587  
 de phase, 581  
 de propagation, 702, 704, 706, 709  
 thermique, 581, 587, 592

## W

Wronskien, 670, 671, 770  
 des fonctions de Bessel, 770, 776

## X - Y - Z

zéro  
 double, 230, 237  
 simple, 237, 325, 338, 553, 627, 629, 791  
 zéros de  $\tan z - z$ , 383, 387



Claude **Aslangul**

# Des mathématiques pour les sciences 2

## Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes

Véritable ouvrage compagnon, *Des mathématiques pour les sciences 2* guidera l'étudiant en sciences tout au long de son cycle d'études, depuis la 2<sup>e</sup> année de Licence (L2) jusqu'au Master, partant de connaissances post-baccalauréat pour aller jusqu'à des sujets avancés sur les plans technique et conceptuel.

Le Tome II présente les corrigés détaillés et commentés des problèmes proposés à la fin de chaque chapitre du livre de cours. La variété des thèmes abordés devrait permettre au lecteur d'une part d'approfondir les concepts, d'autre part d'acquérir la maîtrise des méthodes et des techniques dont l'efficacité permet de progresser vers la solution de la plupart des modélisations.

Chaque corrigé, précédé de l'énoncé correspondant, est rédigé en grand détail afin de permettre la vérification minutieuse de toutes les étapes du raisonnement et des calculs intermédiaires. Le cas échéant, un complément permet d'approfondir un point, ou d'établir un lien avec d'autres questions à première vue quelque peu éloignées du sujet du problème. Enfin, des références sont fournies, qui renvoient tantôt à des ouvrages académiques, tantôt aux revues spécialisées ayant publié les articles originaux dont certains problèmes ont été tirés.



### Les « plus »

- ▶ Exposé concret et illustré
- ▶ Nombreuses applications
- ▶ Corrigés détaillés
- ▶ Démarche fondée sur l'intuition
- ▶ Multiples références aux ouvrages classiques et à des articles historiques ou récents

**Claude Aslangul** est professeur émérite à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et a également enseigné à l'École Normale Supérieure (Ulm) pendant une quinzaine d'années. Il est membre du Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée (Jussieu) et auteur de quatre ouvrages sur la Mécanique quantique aux éditions De Boeck Supérieur.

ISBN 978-2-8041-8172-7



MATSCI2

[www.deboeck.com](http://www.deboeck.com)

Dans le cadre du nouveau Système Européen de Transfert des Crédits (ECTS), ce manuel couvre les niveaux :

- en France : Licence 2, 3 et Master 1.
- en Belgique : Baccalauréat 2, 3 et Master 1.
- en Suisse : Baccalauréat 2, 3 et Master 1.
- au Canada : Baccalauréat 2, 3 et Master 1.

