MPSI

Exercices d'analyse

David Delaunay

- RÉSUMÉS DE COURS
- MÉTHODES
- 3 NIVEAUX D'EXERCICES :
  - apprentissage
  - entraînement
  - approfondissement
- CORRIGÉS DÉTAILLÉS PAS À PAS

de boeck SUPÉRIEUR

MPSI

Exercices d'analyse

David Delaunay

- RÉSUMÉS DE COURS
- MÉTHODES
- 3 NIVEAUX D'EXERCICES :
  - apprentissage
  - entraînement
  - approfondissement
- CORRIGÉS DÉTAILLÉS PAS À PAS

de boeck SUPÉRIEUR

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboecksuperieur.com**

Rue du Bosquet, 7 B-1348 Louvain-la-Neuve

1ère édition, 2017
1er tirage, 2017

Imprimé aux Pays-Bas.

Dépôt légal:
Dépôt légal France : juin 2017
Dépôt légal Belgique : 2017/13647/089

ISBN : 978-2-8073-0623-3

La pratique d'exercices est essentielle à l'apprentissage du cours de mathématiques : il n'est pas de meilleure façon de mémoriser et de comprendre un théorème que d'en faire usage !

Cet ouvrage regroupe sur 11 chapitres 336 exercices portant sur le programme d'analyse en classe de MPSI. Il respecte strictement le programme en cours et vient compléter l'ouvrage d'*algèbre et probabilités* que l'on retrouvera dans la même collection.

Chaque chapitre commence par un rappel des principales définitions et des résultats essentiels du cours. Il se poursuit avec des exercices aux corrigés détaillés regroupés sur trois niveaux :

— *Les exercices d'apprentissage* servent à l'acquisition des concepts fondamentaux du cours. Ce sont souvent des sujets faciles où j'ai choisi volontairement de ne faire figurer que peu de technicité.

— *Les exercices d'entraînement* permettent de poursuivre l'acquisition du cours, trois niveaux d'étoiles servent à anticiper leur difficulté. Ces sujets ont été choisis pour leur intérêt, leur classicisme ou ont été inspirés par des questions rencontrées aux écrits et aux oraux des différents concours.

— *Les exercices d'approfondissement* sont les plus ambitieux, ils nécessitent souvent de passer par une phase de recherche ou entrent en résonance avec d'autres chapitres du programme. Ces sujets sont inspirés de questions rencontrées aux concours les plus ambitieux.

Les corrections des exercices sont accompagnées de *méthodes*. Celles-ci servent à souligner les idées récurrentes ou bien à mettre en exergue la démarche qui va être suivie pour résoudre la question posée. Le lecteur pourra prendre appui sur celles-ci pour amorcer une résolution ou pour reprendre la main lors de sa lecture d'une correction. Afin d'aider le lecteur dans son étude, il est fait référence aux théorèmes utilisés lors de leurs premiers usages. Les notes de bas de pages complètent les résolutions en présentant des démarches alternatives ou font le lien avec d'autres sujets présents dans l'ouvrage.

Je remercie vivement Olivier Rodot d'avoir initié ce projet, François Pantigny pour son expertise TeXnique et Pierrick Soleillant pour sa relecture attentive ainsi que les corrections apportées.

Je dédicace cet ouvrage à mon fils Noé.

David Delaunay

CHAPITRE 1

Nombres et fonctions réelles

1.1 Les nombres réels

1.1.1 Les ensembles de nombres remarquables

Les nombres *naturels* $0, 1, 2 \ldots$ forment l'ensemble $\mathbb{N}$.
Les nombres *entiers* (relatifs) $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ forment l'ensemble $\mathbb{Z}$.
Les nombres *rationnels* (p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) forment l'ensemble $\mathbb{Q}$.
Parmi les nombres rationnels, figurent les nombres *décimaux* ($p/10^k$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$) constituant l'ensemble $\mathbb{D}$.
Ces nombres ne suffisent pas aux mathématiques modernes car il émerge naturellement des nombres *irrationnels* tels $\sqrt{2}$ ou π. Cela motive l'introduction des nombres *réels*.

1.1.2 Le corps des réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni d'une opération d'addition « $+$ » vérifiant pour tous les réels a, b, c :

$$\begin{array}{ll} a + b = b + a & \textit{commutativité} \\ (a + b) + c = a + (b + c) & \textit{associativité} \\ 0 + a = a & 0 \textit{ est élément neutre} \end{array}$$

De plus, pour tout réel a, il existe [1] un réel a' unique tel que $a + a' = 0$. Ce réel a' est noté $-a$ et cela permet de définir l'opération de soustraction « $-$ ».

1. On dit que tout réel admet un *opposé*.

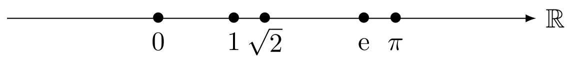
L'ensemble $\mathbb{R}$ est aussi muni d'une opération de multiplication « $\times$ » vérifiant pour tous les réels a, b, c :

$ab = ba$	*commutativité*
$(ab)c = a(bc)$	*associativité*
$1 \times a = a$	1 *est élément neutre*
$a(b + c) = ab + ac$	*distributivité sur* $+$

De plus, pour tout réel a non nul, il existe [1] un réel a' unique tel que $aa' = 1$. Ce réel est noté $1/a$ et cela permet de définir l'opération de division « / ».
Ces différentes propriétés calculatoires font de $\mathbb{R}$ un corps [2] de neutres 0 et 1.

1.1.3 La droite réelle

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total $\leqslant$ qui permet d'apparenter cet ensemble à une droite.



La relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec les opérations d'addition et de multiplication dans le sens où, pour tous les réels a, b, c,

$$\begin{aligned} a \leqslant b &\implies a + c \leqslant b + c \\ a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0 &\implies ab \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ces propriétés « minimalistes » suffisent à retrouver les propriétés calculatoires classiques comme par exemple

$$\begin{aligned} a \leqslant b &\implies -b \leqslant -a \\ a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0 &\implies ac \leqslant bc. \end{aligned}$$

1.1.4 Partie minorée, partie majorée

Définition

> Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *minorée* (resp. *majorée*) s'il existe un réel M pour lequel $a \geqslant M$ pour tout a de A (resp. $a \leqslant M$). On dit alors que M est un *minorant* de la partie A (resp. un *majorant*).

Une partie de $\mathbb{R}$ à la fois minorée et majorée est dite *bornée*.

Définition

> Un majorant d'une partie A qui appartient à celle-ci s'appelle un *maximum* (ou un *plus grand élément*) de la partie A. Lorsqu'il existe, un tel élément est unique, on le note $\max(A)$.

---

1. On dit que tout réel non nul est *inversible*. Cette propriété ne valant que pour les réels non nuls, on prend toujours garde à ne pas diviser par 0 !
2. Ce concept est présenté dans la section 4.3 du chapitre 4 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI* dans la même collection.

Mutatis mutandis[1], un minorant d'une partie A qui appartient à celle-ci se nomme un *minimum* (ou un *plus petit élément*). Lorsqu'il existe, un tel élément est unique et se note $\min(A)$.

1.1.5 La propriété de la borne supérieure

Définition

> On appelle *borne supérieure*[2] d'une partie A de $\mathbb{R}$, lorsqu'elle existe, le plus petit des majorants de A. Celle-ci est notée $\sup(A)$.

Si une partie admet un plus grand élément, autrement dit un maximum, celui-ci est borne supérieure de la partie. En revanche, une partie peut admettre une borne supérieure sans que celle-ci en soit élément[3].
La droite réelle se distingue de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par la propriété dite de la borne supérieure :

Théorème 1
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Aussi, et sous réserve d'existence, on définit la *borne inférieure*[4] $\inf(A)$ d'une partie A de $\mathbb{R}$ comme étant le plus grand des minorants de A. Il suffit qu'une partie de $\mathbb{R}$ soit non vide et minorée pour admettre une borne inférieure. Cette dernière n'est élément de la partie que s'il s'agit d'un minimum.

1.1.6 La valeur absolue

Définition

> On définit la *partie positive* x^+ et la *partie négative* x^- d'un réel x par
>
> $$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition

> On définit la *valeur absolue* d'un réel x par
>
> $$|x| = x^+ + x^- = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

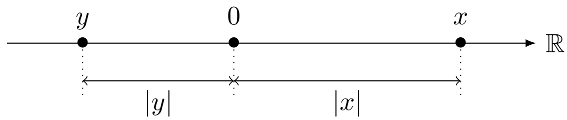
On vérifie que la valeur absolue d'un réel est nulle si, et seulement si, ce réel est nul et que la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues. Aussi :

---

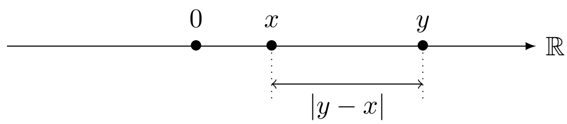
1. Locution latine signifiant « En modifiant ce qui doit être changé ».
2. On parle aussi de *supremum*.
3. Une borne supérieure est un majorant qui « touche » la partie. Elle ne lui appartient que s'il s'agit d'un maximum.
4. ou *infimum*.

Théorème 2 (Inégalité triangulaire)
Pour tous x et y réels, on a $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ avec égalité si, et seulement si, x et y ont le même signe.

La valeur absolue permet de mesurer la distance d'un réel à 0.



Plus généralement, $|y-x|$ définit la *distance* séparant deux réels x et y.



1.1.7 La fonction partie entière

Définition

> On appelle *partie entière* d'un réel x le plus grand entier inférieur ou égal à x. Celui-ci est noté $\lfloor x \rfloor$.

La partie entière d'un réel x apparaît comme l'unique $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant l'encadrement [1]

$$n \leqslant x < n+1.$$

La fonction partie entière est croissante : pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \leqslant y \implies \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor .$$

1.1.8 Congruence réelle

Soit α un réel strictement positif.

Définition

> On dit qu'un réel x est congru à un réel y modulo α s'il existe un entier k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$. On note alors $x \equiv y \ [\alpha]$.

La congruence modulo un réel strictement positif α définit une relation d'équivalence [2] sur $\mathbb{R}$ compatible avec les opérations additives :

Théorème 3
Si x, x', y et y' sont des réels tels que $x \equiv y \ [\alpha]$ et $x' \equiv y' \ [\alpha]$ alors $x + x' \equiv y + y' \ [\alpha]$ et $-x \equiv -y \ [\alpha]$.

1. L'encadrement $x - 1 < n \leqslant x$ est équivalent.
2. C'est-à-dire une relation réflexive, symétrique et transitive voir : la section 1.4 du chapitre 1 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.

La multiplication par un réel nécessite la multiplication du module de congruence :

$$x \equiv y \ [\alpha] \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ \lambda x \equiv \lambda y \ [\lambda\alpha] \, .$$

Tout réel est congru modulo α à un unique réel de $[0\,;\alpha[$ en vertu du résultat suivant :

Théorème 4 (Division euclidienne réelle)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [0\,;\alpha[$ tel que $x = q\alpha + r$.

1.1.9 Les intervalles

Définition

En plus de $\mathbb{R}$ et $\emptyset$, on appelle *intervalle* de $\mathbb{R}$ les ensembles qui suivent (décrits à partir de a et b deux réels vérifiant $a \leqslant b$) :

— les intervalles *fermés* : $[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
$[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$
et $]-\infty\,;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$

— les intervalles *ouverts* : $]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$]a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
et $]-\infty\,;a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

— les intervalles *semi-ouverts* : $[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
et $]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

En particulier, les intervalles $[a\,;b]$ sont aussi appelés *segments* de $\mathbb{R}$.

Théorème 5
Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, elle satisfait la propriété :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad a < b \implies [a\,;b] \subset I.$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ correspondent aux parties « sans trous ». En particulier, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 6
Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

1.1.10 La droite numérique achevée

On forme un nouvel ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ en adjoignant à la droite réelle deux nouveaux éléments notés $+\infty$ et $-\infty$.

Définition

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée *droite numérique achevée.*

On prolonge partiellement l'addition à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout x réel

$$\begin{aligned} x+(+\infty) &= +\infty & x+(-\infty) &= -\infty \\ (+\infty)+(+\infty) &= +\infty & (-\infty)+(-\infty) &= -\infty \end{aligned}$$

On prolonge partiellement la multiplication à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout x réel

$$x \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad x \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
$$(+\infty)\times(+\infty) = (-\infty)\times(-\infty) = +\infty \quad (-\infty)\times(+\infty) = (+\infty)\times(-\infty) = -\infty$$

Certaines opérations ne sont pas définies, ce sont les *formes indéterminées* :

$$\text{« } (+\infty)+(-\infty) \text{ », « } 0\times(+\infty) \text{ »}, \ldots$$

Enfin, on prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout réel x

$$-\infty \leqslant x, \quad x \leqslant +\infty \quad \text{et} \quad -\infty \leqslant +\infty.$$

1.2 Fonctions réelles

1.2.1 Définition

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ (généralement un intervalle).

Définition

Une *fonction réelle* f définie X est une application au départ de X et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Les fonctions réelles sont fréquemment présentées en décrivant comment est calculée la valeur $f(x)$ à partir de la variable x. Ceci se fait en écrivant

$$f(x) = \ldots \text{ ou } f : x \mapsto \ldots$$

Dans la description d'une fonction, la variable joue un rôle muet : il arrive qu'on la figure seulement par un point. Ainsi, $|\cdot|$ désigne la fonction valeur absolue tandis que $\sqrt{\cdot}$ désigne la fonction racine carrée.

Définition

On dit qu'une fonction définie sur X est *constante* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = \lambda$ pour tout x de X. Cette fonction est alors dite *constante égale à* λ et est souvent simplement notée λ.

Par exemple, la *fonction nulle* est la fonction constante égale à 0.

Poursuivons par l'extension de l'identité $f(x) = ax$ aux nombres rationnels. Soit $x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Comme lors de la récurrence ci-dessus, on peut montrer $f(nx) = nf(x)$ pour tout naturel n. En particulier, pour $n = q$, il vient

$$f(p) = f(qx) = qf(x).$$

Or on a aussi $f(p) = ap$ et donc $f(x) = ap/q = ax$.

méthode

> On exploite la croissance de f pour étendre l'identité $f(x) = ax$ des rationnels aux réels.

Soit x un réel. On peut encadrer x par des rationnels voisins grâce à la fonction partie entière. Pour tout naturel n non nul

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}.$$

Par la croissance de la fonction f, on a

$$a\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) = a\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, les deux membres de cet encadrement tendent vers ax et donc, par passage à la limite des inégalités larges (Th. 4 p. 231), on obtient $ax \leqslant f(x) \leqslant ax$. On conclut $f(x) = ax$.

Exercice 30 * (Approximation de Dirichlet)**

Soit x un nombre irrationnel.

Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Solution

méthode

> Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on montre qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in [\![1\,;N]\!]$ tels que
>
> $$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{qN}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction

$$f\colon \begin{cases} [\![0\,;N]\!] \to [0\,;1[\\ \qquad k \mapsto kx - \lfloor kx \rfloor. \end{cases}$$

Celle-ci est définie sur un ensemble possédant $N + 1$ éléments et prend $N + 1$ valeurs distinctes car le réel x est irrationnel [1].

1. En effet, s'il existe k et ℓ distincts dans $[\![0\,;N]\!]$ tels que $f(k) = f(\ell)$, on peut affirmer $x = p/q$ avec $p = \lfloor \ell x \rfloor - \lfloor kx \rfloor$ et $q = k - \ell$.

L'intervalle $[0\,;1[$ peut être découpé en N intervalles disjoints de longueur $1/N$:

$$[0\,;1/N[, [1/N\,;2/N[, \ldots, [(N-1)/N\,;1[.$$

Au moins deux des valeurs prises par f appartiennent à un même[1] intervalle parmi ceux listés ci-dessus. Notons $k < \ell$ deux valeurs de $[\![0\,;N]\!]$ pour lesquelles $f(k)$ et $f(\ell)$ figurent dans le même intervalle. On a

$$\bigl|f(\ell) - f(k)\bigr| \leqslant \frac{1}{N}.$$

En posant $q = \ell - k \in [\![1\,;N]\!]$ et $p = \lfloor \ell x \rfloor - \lfloor kx \rfloor \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{Nq} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Ceci détermine un premier couple (p, q) solution mais permet aussi d'en construire une infinité ! En effet, si $(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)$ sont des premiers couples solutions, on peut en déterminer un nouveau en choisissant N tel que

$$\frac{1}{N} < \min\left\{\underbrace{\left|x - \frac{p_1}{q_1}\right|}_{>0}, \ldots, \underbrace{\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|}_{>0}\right\} \quad \text{car} \quad x \notin \mathbb{Q}.$$

1. Cette idée se nomme *le principe des tiroirs* : si $n+1$ chaussettes sont réparties dans n tiroirs, il existe au moins un tiroir contenant deux chaussettes !

Table des matières

Collection Prépas scientifiques

Dirigée par Olivier Rodot

C. ANTONINI, Algèbre MP/MP*

N. BASBOIS et P. ABBRUGIATI, Algèbre MPSI/PCSI, 2e édition

G. COSTANTINI, Analyse MPSI/PCSI, 2e édition

K. DAO DUC et D. DELAUNAY, Probabilités

D. DELAUNAY, Exercices d'analyse MP/MP*

D. DELAUNAY, Exercices d'analyse MPSI

D. DELAUNAY, Exercices d'algèbre et de probabilités MP/MP*

D. DELAUNAY, Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI

O. RODOT, Analyse MP/MP*

Chez le même éditeur

T. RIBEYRE, Chimie PC/PC*

M.-A. SCHOTT, J. VALENTIN, G. MAGADUR, S. CLÈDE, A.-L. LEFEVRE,

A. ALTMAYER-HENZIEN, Chimie PCSI/MPSI

Cet ouvrage propose 336 exercices d'analyse regroupés par chapitre et accompagnés de résumés de cours. Il est destiné aux élèves de CPGE scientifiques de première année en filière MPSI. Il pourra aussi intéresser les étudiants préparant le CAPES de mathématiques.

Les **résumés de cours** présentent de façon synthétique les définitions et les théorèmes conformément au programme de la filière. Ils seront utiles pour une **révision rapide et efficace** et pourront servir de formulaire.

Les **exercices** proposés sont de niveaux variés et regroupés en trois catégories :

- les **exercices d'apprentissage** permettent l'acquisition des fondamentaux du cours ;
- les **exercices d'entraînement** conduisent à la maîtrise des concepts du chapitre ;
- les **exercices d'approfondissement** invitent les étudiants à une recherche plus fouillée par la mise en résonance de notions présentées dans différents chapitres.

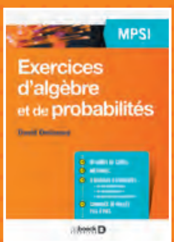
Les corrections des exercices sont **détaillées** pas à pas et accompagnées de **méthodes** mettant en lumière les démarches suivies et les idées récurrentes.

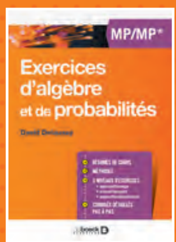
LES +

- des résumés de cours
- des méthodes
- 336 exercices de niveaux variés
- des corrigés très détaillés
- strictement conforme au programme officiel

David DELAUNAY, ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan, est professeur agrégé de mathématiques en classes préparatoires au lycée Dupuy de Lôme de Lorient.

Collection dirigée par Olivier RODOT





ISBN : 978-2-8073-0623-3

9 782807 306233

de boeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo