LES FONDAMENTAUX | L1

MATHÉMATIQUES

- QCM d'évaluation
- Rappels de cours
- Fiches de synthèse
- Plus de 100 exercices intégralement corrigés

Pierre Burg

deboeck SUPÉRIEUR

LES FONDAMENTAUX | L1

MATHÉMATIQUES

Professeur agrégé hors classe,
Pierre Burg enseigne en lycée dans les sections scientifiques
et en section de technicien supérieur.
Il intervient au CNED dans la préparation à l'agrégation interne.

deboeck SUPÉRIEUR

Dans la même collection, pour le même public

CERRUTI C. & STEIMER A., *Physique. Les fondamentaux en L1*, 272 pages
BELLEC C., *Chimie. Les fondamentaux en L1*, 224 pages
BEAUX G., BEAUX J.-F. & BOUTIN V., *Biologie. Les fondamentaux en L1*, 304 pages

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

Maquette et mise en page de l'intérieur : Hervé Soulard/Nexeme
Maquette et mise en page de la couverture : Primo&Primo

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2020/13647/093
Bibliothèque nationale, Paris : juin 2020
ISBN : 978-2-8073-2760-3

Sommaire

Première partie

Algèbre et Géométrie

CHAPITRE 1

Les nombres complexes

Cochez pour chaque question les réponses exactes.

1 On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. La forme algébrique de z^2 est :

❑ **a.** $2\sqrt{2}$

❑ **b.** $2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$

❑ **c.** $2 + 2\sqrt{2} + \mathrm{i}(2-\sqrt{2})$

❑ **d.** $2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}$

2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal. Soit A le point d'affixe 1 + i et B le point d'affixe 1 - i. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-1-i| = |z-1+i|$ est :

❑ **a.** le milieu du segment [AB],

❑ **b.** la droite (AB),

❑ **c.** le cercle de diamètre [AB],

❑ **d.** la médiatrice du segment [AB].

3 Soit A, B et C trois points du plan complexe muni du repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C telles que $z_A = z_C - z_B$ alors on a :

❑ **a.** OACB est un parallélogramme,

❑ **b.** A, B et C sont alignés,

❑ **c.** A est le milieu de [BC].

4 Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe −i. Dire que $M(z) \in \mathscr{C}$ est équivalent à :

❑ **a.** $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$,

❑ **b.** $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$,

❑ **c.** $\mathrm{Re}\left[(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})\right] = 0$,

❑ **d.** $\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

5 On considère le nombre complexe $z = 1 - \tan^2\alpha + 2\mathrm{i}\tan\alpha$ où $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ 0\right[$.
Déterminer les affirmations vraies.

❑ **a.** $\mathrm{Re}(z) > 0$,

❑ **b.** $|z| = 1 + \tan^2\alpha$,

❑ **c.** $\mathrm{Arg}(z) = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

❑ **d.** $\mathrm{Im}(z) = (1+\tan^2\alpha)\sin 2\alpha$.

6 L'équation (E) : $z^3 + 6z^2 + 12z + 9 = 0$ admet dans $\mathbb{C}$, trois solutions $z_1,\ z_2$ et z_3 telles que $\mathrm{Im}(z_1) = 0,\ \mathrm{Im}(z_2) > 0,\ \mathrm{Im}(z_3) < 0$ et on note $M_1,\ M_2,\ M_3$ les images de ces complexes; O est le point d'affixe nulle.

❑ **a.** −3 est solution de (E)

❑ **b.** L'isobarycentre de M_1, M_2, M_3 est le point d'affixe 4

❑ **c.** $M_1M_2M_3$ est un triangle rectangle

❑ **d.** $M_1M_2M_3$ est un triangle isocèle

Réponses page 13

1 Calculs avec les nombres complexes

Théorème 1.1 *Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la* forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$ *avec a et b réels et* i *tel que* $\mathrm{i}^2 = -1$. *Le réel a est la* partie réelle *de z, notée* $a = \mathrm{Re}(z)$ *et b est la* partie imaginaire, *notée* $b = \mathrm{Im}(z)$.

La structure de corps sera étudiée en L1 et nous admettons que tous les calculs algébriques de $\mathbb{R}$ s'étendent à $\mathbb{C}$, par contre la relation d'ordre, $\leqslant$, de $\mathbb{R}$ ne s'étend pas à $\mathbb{C}$.

Calcul

$z_1 = (1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 3 - \mathrm{i}$, en utilisant que $\mathrm{i}^2 = -1$.

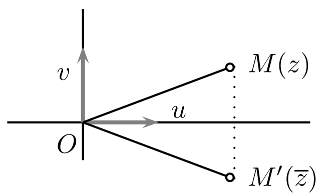
$$z_2 = \frac{4-14\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}} = \frac{2-7\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(2-7\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{|1-\mathrm{i}|^2} = \frac{9}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{i}.$$

$$z_3 = \frac{1}{2+\mathrm{i}} - \frac{1}{3-\mathrm{i}} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}\mathrm{i}.$$

Égalité de nombres complexes

Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$. On a $(z = z') \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$.

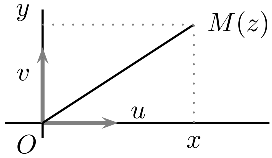
Conjugué



Le *conjugué* de $z = a + \mathrm{i}b$ est le complexe $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.
- Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, et $z \in \mathbb{C}^*$,
  $$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2} \ \text{ et } \ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$
- $(z \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z = \overline{z})$; $(z \in \mathrm{i}\mathbb{R}) \Leftrightarrow (z = -\overline{z})$.

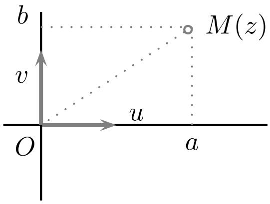
Module



Le *module* de z est défini par $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|z|$ est un réel positif ; il est nul si, et seulement si, $z = 0$.
- $|\bar{z}| = |z|$.
- $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.
- Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$, l'égalité est encore vraie pour $n \in \mathbb{Z}$ lorsque $z \neq 0$.
- Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
- Pour tout $M(z)$ et $M'(z')$, on a $MM' = |z' - z|$.

2 Interprétation géométrique

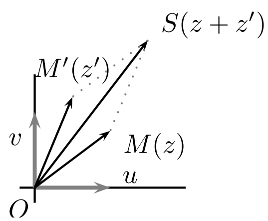


Dans le plan P orienté, rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, à tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées $(a,\ b)$. M est l'*image du nombre complexe* z et z est l'*affixe d'un point* M. On note $M(z)$.

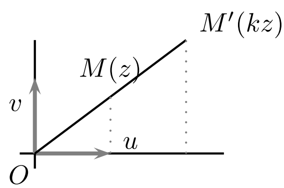
Considérons deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$. Le point C vérifiant $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ appelé aussi *affixe du vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

L'axe $(O,\ \vec{u})$ est appelé *axe des réels* et l'axe $(O,\ \vec{v})$ est appelé *axe des imaginaires*.

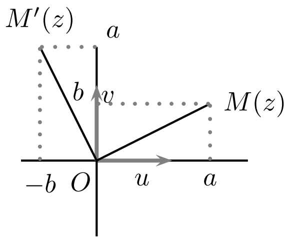
L'**addition** dans $\mathbb{C}$ s'interprète comme addition de vecteurs.



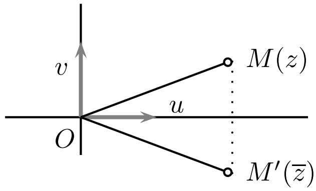
La **multiplication par un réel** k non nul, s'interprète comme une homothétie de centre O et de rapport k. Soient $M(z)$ et $M'(z')$ avec $z' = kz$ alors $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



La **multiplication par** i s'interprète comme la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Si $z' = \mathrm{i}z$ alors $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



La **conjugaison** s'interprète comme la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des réels.



Exemple 1.2 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + \overline{z} - 1 = 0$.

Le complexe $z = x + \mathrm{i}y$, où x, y sont des réels, est solution si, et seulement si,

$$(x + \mathrm{i}y)^2 + (x - \mathrm{i}y) - 1 = 0.$$

On est amené à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 + x - 1 = 0 \\ y(2x-1) = 0 \end{cases}$. On a deux cas de figures :

- $y = 0$ et alors l'équation $x^2 + x - 1$ a deux solutions $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- $x = \dfrac{1}{2}$ alors il n'y a pas de solution pour y.

En conclusion l'équation $z^2 + \overline{z} - 1 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$ et elles sont réelles.

Exemple 1.3

1. Considérons trois points deux à deux distincts A, B, C d'affixes respectives a, b, c. Ces points sont alignés, si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, ce qui revient à $\dfrac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$, soit $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}$.
2. Considérons trois points deux à deux distincts A, B, C d'affixes respectives a, b, c. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\dfrac{b-a}{c-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, soit $\dfrac{b-a}{c-a} + \dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}} = 0$.

3 Racines carrées dans $\mathbb{C}$

Définition 1.4 On appelle racine carrée de z_0 dans $\mathbb{C}$, tout nombre complexe z vérifiant $z^2 = z_0$.

Tout nombre complexe non nul a exactement deux racines carrées opposées, obtenues par la méthode suivante :

Soit $z_0 = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x + iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

L'égalité 2 est l'égalité des normes, par contre les deux autres sont l'égalité des parties réelles et complexes. Le calcul des racines carrées est utile pour la résolution des équations de degré 2 dans $\mathbb{C}$.

Exemple 1.5 Résolvons $z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$. En appliquant le résultat ci-dessus, on est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \\ 2xy = 2\sqrt{2} \quad \text{cette relation sert à déterminer le signe de } xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 1 \\ 2xy = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

ce qui nous donne les deux solutions $z_1 = \sqrt{2} + i$ et $z_2 = -z_1$.

4 Équation de degré 2

Théorème 1.6 *L'équation $az^2 + bz + c = 0$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ admet deux solutions, éventuellement confondues : $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$*

où δ est l'une des racines carrées de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Somme - produit $S = z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $P = z_1 \cdot z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Factorisation Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exemple 1.7 Considérons l'équation $z^2-(3+4\mathrm{i})z-1+5\mathrm{i}=0$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

$$\Delta=-3+4\mathrm{i}.\ \delta^2=(x+\mathrm{i}y)^2=\Delta \text{ revient à } \begin{cases} x^2-y^2=-3\\ \quad xy=2\\ x^2+y^2=5 \text{ égalité des normes}\end{cases}$$

On obtient $\delta=\pm(1+2\mathrm{i})$, d'où $z_1=2+3\mathrm{i}$ et $z_2=1+\mathrm{i}$.

5 Factorisation des Polynômes dans $\mathbb{C}$

Théorème 1.8 *Soit P un polynôme de degré $n\geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ et α un complexe. $P(\alpha)=0$ si, et seulement si, $P(z)=(z-\alpha)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $n-1$.*

α est une racine de P.

Exemple 1.9

1. On a : $z^n-\alpha^n=(z-\alpha)\left(z^{n-1}+\alpha z^{n-2}+\cdots+\alpha^{n-2}z+\alpha^{n-1}\right)$.
2. Soit P le polynôme de degré 3 suivant :
$$P(z)=z^3+(-8+\mathrm{i})z^2+(17-8\mathrm{i})z+17\mathrm{i}.$$
Nous allons donner, sur cet exemple, une idée de preuve du théorème. Montrons d'abord que P admet une racine imaginaire pure.
   - Posons $z=\mathrm{i}b$ où $b\in\mathbb{R}$. Dire que $P(\mathrm{i}b)=0$ revient à dire que : $-\mathrm{i}b^3+8b^2-\mathrm{i}b^2+17b\mathrm{i}+8b+17\mathrm{i}=0$. Sachant qu'un complexe sous forme algébrique est nul si sa partie réelle et sa partie imaginaire est nulle, on a b que vérifie :
$$\begin{cases} 8b^2+8b=0\\ -b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}$$
par suite, seul $b=-1$ est solution puisque $b=0$ n'est pas solution de l'équation 2.
   - Sachant que $P(-\mathrm{i})=0$, on peut écrire $P(z)=P(z)-P(-\mathrm{i})$. Notons $z_0=-i$. On a alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$:
$$\begin{aligned}P(z)&=\left(z^3-z_0^3\right)+(-8+\mathrm{i})\left(z^2-z_0^2\right)+(17-8\mathrm{i})(z-z_0)\\ &=(z-z_0)(z^2+z_0z+z_0^2)+(-8+\mathrm{i})(z-z_0)(z+z_0)+(17-8\mathrm{i})(z-z_0)\\ &=(z-z_0)\left(z^2-\mathrm{i}z-1+(-8+\mathrm{i})z+8\mathrm{i}+1+17-8\mathrm{i}\right)\\ &=(z+\mathrm{i})(z^2-8z+18)\end{aligned}$$
ce qui nous donne la factorisation.

   Par la suite, on utilisera le théorème de factorisation et la définition de l'égalité des polynômes qui dit que deux polynômes de même degré sont égaux si les coefficients semblables sont égaux. En abrégé on dit « par identification ».

6 Exponentielle d'un complexe

Le plan complexe est orienté.

Théorème 1.10 *Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$. Il existe un réel $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.*

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$r = |z|$ *et* $\theta = \arg(z) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) \mod 2\pi$.

Conjugué Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

Produit Pour tout $(\theta,\ \theta')$ $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.

Formule de Moivre Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \quad \text{soit} \quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Formule d'Euler Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Somme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta-\theta'}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}.$$

Égalité

$$z = z' \Leftrightarrow \left(|z| = |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z) = \arg(z') \mod 2\pi\right).$$

Réel et imaginaire pur

$$\text{pour } z \in \mathbb{C}^*, \left(z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0 \mod \pi\right), \left(z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} \mod \pi\right).$$

Exemple 1.11 Déterminons les nombres complexes z de module 1 vérifiant $z^3 = 1$. On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. L'équation s'écrit $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$. Par le théorème d'égalité on a $3\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, soit $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$ ce qui nous donne trois points distincts $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta_3 = \dfrac{-2\pi}{3}$. Ainsi les nombres cherchés sont $z_1 = 1$, $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \overline{z_2}$.

Le complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ est noté usuellement j. On sait alors que les racines cubiques de l'unité sont 1, j et $j^2 = \overline{j}$.

7 Racine $n^{ième}$

Théorème 1.12 *Soit $Z = re^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines de l'équation $z^n = Z$ sont les complexes de module $\sqrt[n]{r}$ et d'arguments $\dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}$ où k décrit $\mathbb{Z}$.*

Les racines de l'équation $z^n = Z$ ont pour image les sommets d'un polygone régulier à n cotés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

8 Géométrie et complexes

Le plan P orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

- Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points distincts du plan.

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = |z_2 - z_1| \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = \arg(z_2 - z_1) \mod 2\pi.$$

- Soient $M_1(z_1),\ M_2(z_2),\ M_3(z_3),\ M_4(z_4)$ tels que $M_1 \neq M_2$ et $M_3 \neq M_4$.

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}\right) = \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) \mod 2\pi.$$

- Trois points deux à deux distincts $M_1(z_1),\ M_2(z_2),\ M_3(z_3)$ sont alignés si, et seulement si, $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.
- L'application $z \mapsto az + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ représente :
  - si $a = 1$, la translation dont le vecteur a pour affixe b,
  - si $a \neq 1$, l'homothétie de rapport a, dont le centre Ω a pour affixe la solution ω de l'équation $\omega = a\omega + b$.
- L'application $z \mapsto az + b$ où $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$ représente :
  - si $a = 1$, la translation dont le vecteur a pour affixe b,
  - si $a \neq 1$, la rotation d'angle $\theta = \arg(a)$ dont le centre Ω a pour affixe la solution ω de l'équation $\omega = a\omega + b$.

Synthèse

Calcul

- Savoir caractériser un complexe réel ou imaginaire pur à l'aide de l'écriture algébrique et de l'écriture trigonométrique.
- Savoir établir l'égalité de nombres complexes sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- Savoir calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$.
- Savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe.
- Savoir calculer les racines $n-$ ième d'un complexe donné sous forme trigonométrique, $n \geqslant 2$. On doit trouver n racines.
- Savoir factoriser un polynôme dont on connaît une racine.

Géométrie

- Connaître les interprétations géométriques des applications $z \mapsto az+b$ où $a \in \mathbb{R}^*$, où $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| = 1$, $z \mapsto \overline{z}$.
- Savoir démontrer que trois points sont alignés.
- Savoir démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercices

Exercice 1

Comment faut-il choisir le réel x pour que $z = \tan x + i(1 - 2\cos 2x)$ soit réel ? soit imaginaire pur ?

Exercice 2

Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si, et seulement si, z est réel.

Exercice 3

À quelle condition géométrique le produit de deux nombres complexes non nuls est-il réel ? imaginaire pur ?

Exercice 4

Résoudre les équations

1. $z^2 = -7 + 24\mathrm{i}$.
2. $z^2 - 2(2+\mathrm{i})z + 6 + 8\mathrm{i} = 0$.
3. $\mathrm{i}z^2 + (4\mathrm{i} - 3)z + \mathrm{i} - 5 = 0$.

Exercice 5

Soient a_0, a_1,..., a_n, $n+1$ nombres réels et p l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. Montrer que si $p(z) = 0$ alors $p(\overline{z}) = 0$.

Exercice 6

À tout nombre complexe z on associe $Z = z^2 - (9 + 2\mathrm{i})z + 26$. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(z)$ pour lesquels Z est un nombre réel.

Exercice 7

Résoudre, en utilisant l'écriture $z = x + \mathrm{i}y$ les équations :

1. $|z| + z = 3 + 4\mathrm{i}$.
2. $z^2 + \overline{z} - 1 = 0$.

Exercice 8

$P(z) = z^3 + (6\mathrm{i} - 5)z + 12 + 18\mathrm{i}$. Sachant que P admet une racine réelle α, factorisez P en un produit de 3 facteurs.

Exercice 9

a et b sont des réels. Écrire les complexes suivants sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $r > 0$.

1. $\sin a - \mathrm{i}\cos a$.
2. $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$.
3. $\dfrac{1 + \mathrm{i}\tan a}{1 - \mathrm{i}\tan a}$ où $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10

Résoudre $[(1-\mathrm{i})z]^3 + \mathrm{i} = 0$.

Exercice 11

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 12

Soit $Z = \dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}}$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

1. Z est réel,
2. Z est imaginaire pur,
3. l'argument de Z soit $\dfrac{\pi}{2}$, $\pmod{2\pi}$.

Exercice 13

On pose $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 14

Montrer que le triangle dont les sommets ont pour affixes $a,\ b,\ c$ est équilatéral direct si, et seulement si, $a + jb + \overline{j}c = 0$ où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Réponses au QCM

1. réponse b
2. réponse d
3. réponse a
4. réponse a
5. réponses vraies a, b, d
6. réponses vraies a, d

Corrigés des exercices

Exercice 1

$z \in \mathbb{R}$ revient à $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ soit $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ si, et seulement si, $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Si on note $M(z)$, $A(\mathrm{i})$ et $B(-\mathrm{i})$, on a MA=MB de sorte que M appartient à la médiatrice de [AB] qui est l'axe des réels.

Exercice 3

Si on note $M(z = a + \mathrm{i}b)$ et $M'(z' = a' + \mathrm{i}b')$ et $N\left(\overline{z'}\right)$, on a $\mathrm{Re}(zz') = aa' - bb'$ et $\mathrm{Im}(zz') = ab' + a'b$. Aussi $zz' \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux ; $zz' \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires.

Exercice 4

1. $z = a + \mathrm{i}b$, a, b réels, en prenant l'égalité des parties réelles, imaginaires et des modules on résout le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ a^2 + b^2 = 25 \\ ab = 12 \end{cases}$$

On a deux racines carrées $3 + 4\mathrm{i}$ et $-3 - 4\mathrm{i}$.

2. $\Delta = 4(-3 - 4\mathrm{i})$, puis $\delta = \pm 2(1 - 2\mathrm{i})$ d'où $z_1 = (3 - \mathrm{i})$ et $z_2 = 1 + 3\mathrm{i}$.
3. $\Delta = -3 - 4\mathrm{i}$, comme ci-dessus, on a : $z_1 = 3 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -1 + 2\mathrm{i}$.

Exercice 5

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z} \text{ car } \overline{a_k} = a_k \\ &= \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z} \text{ car } \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Exercice 6

On pose $z = x + \mathrm{i}y$, x, y réels. Z est réel si, et seulement si, $\mathrm{Im}(Z) = 0$, soit $2xy + 9y + 2x = 0$. Les points M cherchés sont les points de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{-2x}{2x+9}$.

Exercice 7

1. Par égalité des parties réelles et imaginaires, on résout le système :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - x \\ y = 4 \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} x^2 + 16 = (3 - x)^2, \quad x \leqslant 3 \\ y = 4. \end{cases}$$

On a une unique solution $z = \dfrac{-7}{6} + 4\mathrm{i}$.

2. Comme ci-dessus, on résout :

$$\begin{cases} x^2 + x - y^2 - 1 = 0 \\ (2x - 1)y = 0 \end{cases}$$

ce qui nous amène à deux cas de figure $x = \dfrac{1}{2}$ ou $y = 0$. On a ainsi quatre solutions $z = \dfrac{1 \pm \mathrm{i}}{2}$ ou $z = -1 \pm \sqrt{5}$.

Exercice 8

La racine réelle x, s'obtient par la définition d'un complexe nul, les parties réelles et imaginaires sont nulles. On résout dans $\mathbb{R}$ le système $x^3-5x+12=0$ et $6x+18=0$ dont la seule solution est $\alpha=-3$. On utilise, par exemple que $P(z)=P(z)-P(\alpha)$ et la factorisation de $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$\begin{aligned} P(z) &= (z^3-\alpha^3)+(6\mathrm{i}-5)(z-\alpha) \\ &= (z-\alpha)(z^2+\alpha z+\alpha^2+6\mathrm{i}-5) \\ &= (z+3)(z^2-3z+4+6\mathrm{i}) \\ &= (z+3)(z-2\mathrm{i})(z-3+2\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Exercice 9

1. $\sin a - \mathrm{i}\cos a = \cos\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-\frac{\pi}{2})}$.
2. $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{a}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a}{2}}\right)=2\cos\dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a}{2}}$.
3. $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan a}{1-\mathrm{i}\tan a}=\dfrac{\cos a+\mathrm{i}\sin a}{\cos a-\mathrm{i}\sin a}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a}$.

Exercice 10

On sait que $-i=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Posons $Z=(1-\mathrm{i}z)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et résolvons $r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Or, deux complexes sont égaux si, et seulement si, les modules sont égaux et les arguments sont égaux modulo 2π. Dans $\mathbb{R}$, $r^3=1$ équivaut à $r=1$ et $3\theta=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; soit $\theta=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}$. On obtient ainsi $(1-\mathrm{i})z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}+\frac{2k\mathrm{i}\pi}{3}}$. Or $1-i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Les solutions sont les complexes $Z=\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}+\frac{2k\mathrm{i}\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}+\frac{2k\mathrm{i}\pi}{3}}$

Exercice 11

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)$. Comme $x\in\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a, dans la seconde somme, une progression géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 12

On suppose $z \neq 2\mathrm{i}$. Posons $z = x + \mathrm{i}y,\ x, y$ réels. On peut mettre Z sous forme algébrique mais nous allons utiliser la propriété $Z \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\overline{Z} = Z$, puis $Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\overline{Z} = -Z$.

1. $\dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}} = \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}+2\mathrm{i}}$ et par produit en « croix » on obtient $(z-\overline{z}) - 2\mathrm{i}(z+\overline{z}) - 4\mathrm{i} = 0$ soit $2\mathrm{i}(y - 2x - 2) = 0$. Ainsi les points $M(z)$ solutions sont ceux dont les images appartiennent à la droite d'équation $y = 2x + 2$ privée du point de coordonnées $(0,\ 2)$.
2. $\dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}} = -\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}+2\mathrm{i}}$ nous amène à la relation $2|z|^2 + (z+\overline{z}) + 2\mathrm{i}(z-\overline{z}) = 0$. Soit $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$. On reconnaît l'équation de la circonférence de centre $A\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et de rayon $r = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Ainsi les points $M(z)$ solutions sont ceux dont les images appartiennent à ce cercle privé du point de coordonnées $(0,\ 2)$.
3. Posons $B(-1)$, $C(2\mathrm{i})$ et $M(z)$ où z est distinct de -1 et $2\mathrm{i}$, les arguments n'étant pas définis dans ces cas. On a $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. Les images de z sont les points de la demi-circonférence de diamètre $[BC]$ privée des points B et C, située à « gauche » de la droite (BC).

Exercice 13

$1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$ car $j^3 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$.

Exercice 14

On note $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ les points du triangle. Dire que ABC est équilatéral direct revient à dire que B est l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ soit $c - b = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(c - a)$.
On remarque que $\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}} = -j$ et $-\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}} - 1 = -j - 1 = j^2$, d'après l'exercice 13. En réduisant la relation qui traduit la rotation on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} a - b + c\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}\right) &= 0 \\
a - b\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} + c\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} - 1\right) &= 0 \\
a + bj + c(-j - 1) &= 0 \\
a + bj + cj^2 &= 0.
\end{aligned}$$

CHAPITRE 2

Géométrie dans le plan et l'espace

Cochez pour chaque question les réponses exactes.

1 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $\begin{cases} x = t-2 \\ y = 2t+1 \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 5t-5 \end{cases}$

❑ **a.** $M(1,2,5) \in \mathscr{D}$,

❑ **b.** $\vec{u}(1,2,5)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$,

❑ **c.** $\mathscr{D}$ est contenue dans le plan : $x + 2y - z - 5 = 0$,

❑ **d.** $\mathscr{D}$ est parallèle au plan : $-5x + z = 0$.

2 L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. La droite de l'espace passant par le point B(2; 3; 4) et admettant le vecteur $\vec{u}(1; 2; 3)$ comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 3t+1 \end{cases}$

❑ **a.** Vrai,

❑ **b.** Faux.

3 On considère les points A(-1; 0; 2), B(1; 4; 0), et C(3; -4; -2).

❑ **a.** Le plan (ABC) a pour équation : $x + z = 1$,

❑ **b.** Le plan (ABC) a pour équation : $\begin{cases} x = t + t' \\ y = 2t - t' \qquad t, t' \in \mathbb{R}, \\ z = -t - t' + 1 \end{cases}$

4 Soit A, B, C trois points non alignés du plan $\mathscr{P}$ et G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Pour tout point M, on définit M' par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$. Le point I est le milieu du segment [AB].

❑ **a.** G vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

❑ **b.** M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport 3,

❑ **c.** Le point G est le milieu du segment [IC],

❑ **d.** Si le triangle (ABC) est rectangle en A, alors $GA = GC$.

5 L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2y + 2z - 1 = 0$, les points $A(1\,;\,1\,;\,1)$, $B(-1\,;\,5\,;\,-3)$ et $C(3\,;\,0\,;\,5)$. On note $\mathcal{S}$ la sphère de centre A passant par B.

- ❑ **a.** Une équation du segment [AB] est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, avec $t \in [0\,;\,1]$.
- ❑ **b.** La distance de B à $\mathcal{P}$ est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- ❑ **c.** $\mathcal{S}$ coupe $\mathcal{P}$ en un cercle de centre A et de même rayon.
- ❑ **d.** L'isobarycentre de $\{A,\,B,\,C\}$ est un point de $\mathcal{P}$.

6 0 désigne une matrice nulle, A, B des matrices de dimension $n \times p$.

- ❑ **a.** Une matrice A est non nulle si tous ses coefficients sont non nuls,
- ❑ **b.** Si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$,
- ❑ **c.** Toute matrice non nulle est inversible,
- ❑ **d.** $A \times B$ n'est pas toujours défini.

7 Soit la matrice $H = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et I la matrice unité d'ordre 2.

- ❑ **a.** $H^2 = k^2 I$,
- ❑ **b.** $AH = HA$ pour toute matrice carrée A d'ordre 2,
- ❑ **c.** $H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$.

➠ **Réponses page 39**

Géométrie dans le plan

On se place dans le plan euclidien orienté $\mathcal{E}_2$, muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$. On note $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

1 Produit scalaire et déterminant

Définition 2.1

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\vec{v} = \vec{0}$ ou, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires on dit qu'ils sont *indépendants ou libres*, alors tout vecteur $\vec{w}$ peut s'exprimer de façon unique sous la forme $w = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec $(x,\,y) \in \mathbb{R}^2$. On note $\vec{w}(x,\,y)$. On dit que $(\vec{u},\,\vec{v})$ est une *base* de l'espace des vecteurs du plan, noté $\vec{E}_2$.
- Si A, B, C sont trois points distincts du plan, la mesure de l'*angle géométrique* $\widehat{BAC}$ est l'unique réel de $[0,\,\pi]$ tel que $\cos\widehat{BAC} = \cos\left(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right)$.

Conforme aux cursus des Licences scientifiques, ce manuel permet aux étudiants de renforcer leurs compétences et leur autonomie en mathématiques durant toute leur première année de Licence. Le contenu traite du socle de connaissances commun à l'ensemble des universités.

Dans chaque chapitre

- Un QCM d'évaluation pour tester ses acquis.
- Des rappels de cours et leur synthèse pour réviser les grandes notions abordées durant l'année.
- De nombreux exercices d'application intégralement corrigés pour s'exercer efficacement.

SOMMAIRE

ISBN : 978-2-8073-2760-3

9 782807 327603

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo®