

Sommaire

Algèbre générale

1	Reconnaitre un groupe, un anneau ou un corps par les axiomes	9
2	Montrer qu'une application est un morphisme de groupe ou un morphisme d'anneaux	14
3	Montrer qu'une partie d'un groupe (d'un anneau) est un sous-groupe (un sous-anneau)	17
4	Calculer et utiliser l'ordre d'un élément dans un groupe	21
5	Montrer qu'une partie d'un anneau est un idéal	26
6	Faire des calculs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	30
7	Utiliser le théorème chinois	34

Algèbre linéaire

8	Montrer qu'une somme est directe	41
9	Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque	45
10	Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie	51

Réduction des endomorphismes

11	Calculer un polynôme caractéristique	57
12	Déterminer le spectre d'une matrice carrée sans le polynôme caractéristique	63
13	Montrer qu'un sous espace vectoriel est stable par un endomorphisme	68
14	Montrer qu'un endomorphisme (une matrice carrée) est diagonalisable « à la main »	74
15	Montrer qu'un endomorphisme (une matrice carrée) est trigonalisable et trigonaliser (cas $n = 2$ et $n = 3$)	81
16	Montrer qu'un endomorphisme (une matrice) est nilpotent(e) et l'utiliser	87
17	Calculer le polynôme minimal d'un endomorphisme (d'une matrice carrée)	92
18	Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme (d'une matrice carrée)	97
19	Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable en utilisant des polynômes annulateurs	102
20	Mettre en œuvre le lemme de décomposition des noyaux	107

Fonctions convexes

21	Montrer qu'une fonction est convexe	115
22	Utiliser les fonctions convexes pour démontrer des inégalités	118

Espaces vectoriels normés

23	Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est convexe	123
24	Montrer qu'une application est une norme	126
25	Montrer qu'une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé converge ou diverge	131
26	Montrer que des normes sont équivalentes	136
27	Montrer qu'un ensemble est ouvert (ou fermé) avec définition ou stabilité	140
28	Calculer l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble	145
29	Montrer qu'une partie est dense dans un ensemble	150
30	Montrer qu'une application est continue	155
31	Montrer qu'une partie est ouverte (ou fermée) avec une fonction continue	160
32	Montrer qu'une application linéaire est continue	163
33	Utiliser une fonction polynomiale en ses coordonnées	167
34	Montrer qu'une partie est compacte	170
35	Utiliser la compacité. Lien avec les applications continues	174
36	Montrer qu'un ensemble est connexe par arcs	178

Algèbre bilinéaire

37	Montrer qu'une application est un produit scalaire	183
38	Déterminer le projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	187
39	Mettre en place le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	194
40	Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est symétrique	199
41	Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est orthogonal	204
42	Utiliser le théorème spectral	208
43	Réduire une isométrie en dimension 3	212

Dénombrabilité et familles sommables

44	Montrer qu'un ensemble est dénombrable (ou pas)	221
45	Montrer qu'une famille est sommable et calculer sa somme	224

Séries numériques

46	Étudier la nature d'une série à termes positifs	231
47	Étudier la nature d'une série alternée	236
48	Étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe constant	242
49	Utiliser le critère de d'Alembert	246

50	Reconnaitre un produit de Cauchy	250
51	Utiliser une comparaison suite-série	255
52	Mettre en place une comparaison série intégrale	260
53	Utiliser la sommation des relations de comparaison	268

Suites et séries de fonctions

54	Déterminer la limite simple d'une suite de fonctions. Cas des séries de fonctions	275
55	Étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions	279
56	Montrer qu'une série de fonctions converge uniformément en utilisant la convergence normale	284
57	Montrer qu'une série de fonctions qui ne converge pas normalement converge uniformément	288
58	Montrer que la limite d'une suite de fonctions est continue. Cas des séries de fonctions	292
59	Calculer des limites d'une fonction définie comme une somme de série	296
60	Intervertir une limite et une intégrale sur un segment par convergence uniforme	300
61	Intervertir une somme et une intégrale sur un segment par convergence uniforme	304
62	Montrer que la limite d'une suite de fonctions est de classe C^1 . Cas des séries de fonctions	308

Séries entières

63	Déterminer le rayon de convergence d'une série entière	317
64	Calculer la somme d'une série entière	323
65	Montrer qu'une fonction est développable en série entière et calculer son développement	329
66	Utiliser des séries entières pour résoudre des équations différentielles	334
67	Déterminer un développement en série entière en utilisant une équation différentielle	340

Intégration

68	Déterminer la nature d'une intégrale	349
69	Montrer qu'une fonction est (ou n'est pas) intégrable	355
70	Calculer une intégrale impropre à l'aide d'une intégration par parties	359
71	Calculer une intégrale impropre à l'aide d'un changement de variables	363
72	Utiliser l'intégration des relations de comparaison	368
73	Utiliser le théorème de convergence dominée	373
74	Utiliser le théorème d'intégration terme à terme	377
75	Étudier la continuité et la dérivabilité d'une intégrale à paramètre	383

Compléments de probabilité

76	Montrer qu'un ensemble est un événement	393
77	Utiliser la continuité d'une probabilité ; événements négligeables ou presque sûrs	396
78	Utiliser un système complet d'événements et la formule des probabilités totales	402
79	Utiliser la formule de Bayes	408
80	Utiliser les lois usuelles pour modéliser une expérience aléatoire	412
81	Montrer qu'une variable aléatoire admet une espérance finie et la calculer	418
82	Utiliser la formule de transfert pour calculer une espérance	424
83	Montrer qu'une variable aléatoire admet une variance et la calculer	428
84	Calculer la covariance de deux variables aléatoires	434
85	Calculer l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires	437
86	Utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	442
87	Déterminer et utiliser une fonction génératrice	446

Exponentielle de matrices et équations différentielles

88	Résoudre un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants	455
89	Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à l'aide d'une variation des constantes	461
90	Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à l'aide d'une indication	467
91	Calculer l'exponentielle d'une matrice	472
92	Utiliser la variation des constantes pour un système différentiel linéaire	478
93	Recoller des solutions d'une équation différentielle	482

Calcul différentiel

94	Calculer la dérivée en un point selon un vecteur ; calculer des dérivées partielles	491
95	Montrer qu'une fonction est différentiable et calculer une différentielle	496
96	Calculer les dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables. Règle de la chaîne	502
97	Rechercher les extrema d'une fonction	507
98	Résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles	512