

Table des matières

I	Généralités	11
1	Les grands problèmes en statistiques inférentielles	11
1.1	Modélisation paramétrique	11
1.2	Les différentes problématiques à résoudre	13
2	Quelques exemples et modèles standards	14
2.1	Lancers d'une pièce de monnaie	14
2.2	Lancers d'un dé	15
2.3	Le modèle gaussien	15
2.4	Un modèle discret	17
3	Conclusion du chapitre	18
II	Estimation de paramètres	19
1	Propriétés souhaitées pour un estimateur	19
1.1	Estimateurs sans biais	21
1.2	Estimateurs convergents	23
1.3	Estimateurs asymptotiquement normaux	26
1.4	Estimateurs efficaces	30
1.5	Robustesse	33
2	Exemple sur le modèle uniforme continu	34
2.1	Etude de \hat{a}_n et \hat{b}_n	35
2.2	Etude de \tilde{a}_n et \tilde{b}_n	38
2.3	Simplification au cas $\mathcal{U}([0, b])$	41
3	Exercices	41
III	Estimateurs du maximum de vraisemblance et méthode des moments	45
1	La méthode des moments	45
1.1	Exemple sur le modèle gaussien	46
1.2	Exemple sur le modèle uniforme	46

1.3	Exemple avec des équations non-indépendantes	47
1.4	Limites de la méthode des moments	48
2	Les estimateurs du maximum de vraisemblance	49
2.1	Vraisemblance sur un modèle discret	49
2.2	Estimateurs du maximum de vraisemblance	53
2.3	Exemple d'EMV sur le modèle exponentiel	54
2.4	Exemple d'EMV sur le modèle gaussien	55
2.5	EMV dans le modèle uniforme	57
2.6	EMV dans le modèle de Poisson	58
2.7	EMV implicite : cas de la loi de Cauchy	59
3	Conclusion	60
4	Exercices	60
IV	Exhaustivité et information de Fisher	63
1	Statistiques exhaustives	63
1.1	Définition	63
1.2	Exemple sur des tirages à pile ou face	64
1.3	Théorème de factorisation de Fisher-Neyman	65
1.4	Exemple sur le modèle gaussien	67
1.5	Exemple sur le modèle de Bernoulli	68
1.6	Cas des modèles dits exponentiels	68
2	Construction d'estimateurs sans biais efficaces	71
2.1	Théorème de Rao-Blackwell	71
2.2	Complétude et estimateur efficace	74
3	Information de Fisher	78
3.1	Cas des modèles unidimensionnels	78
3.2	Généralisation aux modèles multi-dimensionnels	85
4	Exercices	87
V	Intervalles de confiance	91
1	Régions et intervalles de confiance	91
2	Intervalles de confiance du modèle gaussien	93
2.1	Construction de l'intervalle de confiance sur la moyenne	94
2.2	Intervalle de confiance sur la variance	97
2.3	Intervalle de confiance sur la différence de deux moyennes	98
3	Intervalles de confiance du modèle exponentiel	99
4	Intervalles de confiance asymptotiques	101

4.1	Intervalles de confiance asymptotiques pour le modèle exponentiel	103
4.2	Intervalles de confiance asymptotiques pour le modèle de Bernoulli	104
5	Exercices	106
VI	Tests d'hypothèses	109
1	Définition d'un test binaire d'hypothèses	109
1.1	Définition générale d'un test binaire d'hypothèses	109
1.2	Types d'erreur et p -valeur d'un test d'hypothèses	110
2	Tests d'hypothèses associés au modèle gaussien	113
2.1	Test de comparaison de la moyenne à une valeur donnée	113
2.2	Test de comparaison de la variance à une valeur donnée	115
2.3	Test de comparaison de deux moyennes	115
2.4	Cadre asymptotique et approximation gaussienne	118
3	Test asymptotique sur une proportion	118
4	Test d'adéquation à une loi discrète	119
5	Test d'indépendance de deux variables discrètes	121
6	Test d'adéquation à une loi continue	122
7	Tests non paramétriques	124
7.1	Test de Wilcoxon	126
7.2	Test exact de Fisher	127
7.3	Autres tests	128
8	Exercices	128
VII	Régression linéaire	131
1	Régression linéaire simple	131
1.1	Présentation du modèle gaussien sous-jacent	131
1.2	Estimation des paramètres	133
1.3	Coefficient R de la régression	140
1.4	Intervalles de confiance et de prédiction	140
1.5	Tests sur les paramètres	142
2	Régression linéaire multiple	145
2.1	Cadre général et notations	146
2.2	Estimation par la méthode des moindres carrés	147
2.3	Estimateur du maximum de vraisemblance	149
2.4	Intervalles de confiance sur les paramètres	150
2.5	Tests sur les régresseurs	151

2.6	Utilisation de la régression linéaire multiple	153
3	Exercices	155
VIII	Solutions des exercices	159
1	Estimation de paramètres	159
2	EMV et méthode des moments	166
3	Exhaustivité, efficacité et information de Fisher	176
4	Intervalle de confiance	186
5	Tests d'hypothèses	190
6	Régression linéaire	193
Annexe A	Loi normale et ses dérivées	201
1	Variables gaussiennes et vecteurs gaussiens	201
1.1	Variables aléatoires gaussiennes	201
1.2	Vecteurs gaussiens	205
2	Lois du χ^2	211
3	Lois de Student	213
4	Lois de Fisher	216
Annexe B	Théorème de Cochran	219
1	Enoncé et démonstration	219
2	Applications du théorème au modèle gaussien	222
2.1	Intervalle de confiance sur la moyenne dans le modèle gaussien	222
2.2	Intervalle de confiance sur la variance dans le modèle gaussien	224
2.3	Intervalle de confiance sur la différence de deux moyennes dans le modèle gaussien	224
2.4	Régression linéaire simple	228
2.5	Régression linéaire multiple	232
	Bibliographie	237
	Index	239