

Aref Jeribi

# Résolution de divers problèmes elliptiques par des méthodes d'éléments finis

Cours, exercices, et problèmes corrigés



---

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Les espaces de Hilbert</b>                         | <b>13</b> |
| 1.1      | Norme . . . . .                                       | 13        |
| 1.2      | Produit scalaire . . . . .                            | 14        |
| 1.3      | Propriétés élémentaires . . . . .                     | 15        |
| 1.3.1    | Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .                 | 15        |
| 1.3.2    | Inégalité triangulaire . . . . .                      | 15        |
| 1.3.3    | Identité de parallélogramme . . . . .                 | 16        |
| 1.3.4    | Identité de polarisation . . . . .                    | 16        |
| 1.3.5    | Relation de Pythagore . . . . .                       | 16        |
| 1.3.6    | Formule de Simpson . . . . .                          | 16        |
| 1.4      | Orthogonalité . . . . .                               | 17        |
| 1.4.1    | Définitions . . . . .                                 | 17        |
| 1.4.2    | Bases orthonormées . . . . .                          | 18        |
| 1.4.3    | Projection orthogonale . . . . .                      | 19        |
| 1.5      | Matrice . . . . .                                     | 20        |
| 1.5.1    | Matrice définie positive . . . . .                    | 20        |
| 1.5.2    | Matrice orthogonale . . . . .                         | 21        |
| 1.5.3    | Matrice monotone . . . . .                            | 21        |
| 1.6      | Espace de Hilbert . . . . .                           | 21        |
| 1.6.1    | Exemple . . . . .                                     | 21        |
| 1.6.2    | Ensembles et fonctions convexes . . . . .             | 22        |
| 1.7      | Projection sur un convexe fermé . . . . .             | 22        |
| 1.8      | Le dual d'un espace de Hilbert . . . . .              | 31        |
| 1.8.1    | Théorème de représentation de Riesz Fréchet . . . . . | 31        |
| 1.8.2    | Exemple . . . . .                                     | 33        |
| 1.9      | Théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram . . . . .     | 34        |
| 1.9.1    | Continuité et coercivité . . . . .                    | 34        |
| 1.9.2    | Théorème de Stampacchia . . . . .                     | 34        |
| 1.9.3    | Théorème de Lax-Milgram . . . . .                     | 39        |
| 1.10     | Procédé de Gram-Schmidt . . . . .                     | 41        |
| 1.11     | Base hilbertienne . . . . .                           | 42        |
| 1.11.1   | Définition . . . . .                                  | 42        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 1.11.2   | Caractérisation d'une base hilbertienne . . . . .  | 42         |
| 1.12     | Exercices . . . . .  | 45         |
| 1.13     | Corrigés . . . . .   | 52         |
| <b>2</b> | <b>Les espaces de Sobolev</b>  | <b>85</b>  |
| 2.1      | Rappels sur les distributions . . . . .  | 85         |
| 2.1.1    | L'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ . . . . .   | 85         |
| 2.1.2    | L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . . .   | 86         |
| 2.1.3    | L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .  | 87         |
| 2.1.4    | Distribution régulière . . . . .   | 87         |
| 2.1.5    | Dérivation au sens des distributions . . . . .   | 90         |
| 2.2      | Espace de Sobolev d'ordre 1, $H^1(\Omega)$ . . . . .   | 93         |
| 2.2.1    | Définition . . . . .   | 93         |
| 2.2.2    | Espace de Hilbert séparable . . . . .  | 94         |
| 2.2.3    | Inégalité de Poincaré . . . . .  | 96         |
| 2.2.4    | Quelques propriétés de l'espace $H_0^1(\Omega)$ . . . . .  | 98         |
| 2.3      | Théorème de trace . . . . .  | 99         |
| 2.3.1    | En dimension $n = 1$ . . . . .   | 99         |
| 2.3.2    | En dimension $n \geq 2$ . . . . .  | 100        |
| 2.3.3    | Application du théorème de trace . . . . .   | 102        |
| 2.3.4    | Formule de Green . . . . .   | 102        |
| 2.4      | Les espaces de Sobolev d'ordre $m$ . . . . .   | 103        |
| 2.4.1    | Les espaces de Sobolev d'ordre $m$ , $H^m(\Omega)$ $m \geq 1$ . . . . .  | 103        |
| 2.4.2    | Espace de Hilbert séparable . . . . .  | 104        |
| 2.4.3    | Théorème de trace . . . . .  | 105        |
| 2.4.4    | Les espaces de Sobolev d'ordre $m$ , $W^{m,p}(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty$<br>et $m \in \mathbb{N}$ . . . . . | 107        |
| 2.5      | Exercices . . . . .  | 108        |
| 2.6      | Corrigés . . . . .   | 110        |
| <b>3</b> | <b>Formulation variationnelle</b>  | <b>113</b> |
| 3.1      | Problème de Dirichlet . . . . .  | 113        |
| 3.1.1    | Formulation variationnelle . . . . .   | 113        |
| 3.1.2    | Équivalence entre formulation variationnelle et problème fort  | 114        |
| 3.1.3    | Existence et unicité . . . . .   | 116        |
| 3.2      | Problème de Neumann . . . . .  | 118        |
| 3.2.1    | Formulation variationnelle . . . . .   | 118        |
| 3.2.2    | Existence et unicité . . . . .   | 118        |
| 3.2.3    | Équivalence entre formulation variationnelle et problème fort  | 119        |
| 3.3      | Exercices . . . . .  | 121        |
| 3.4      | Corrigés . . . . .   | 123        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>4</b> | <b>Introduction aux éléments finis</b>                       | <b>133</b> |
| 4.1      | Méthode de Galerkin . . . . .                                | 133        |
| 4.2      | Dimension 1 et introduction des éléments finis . . . . .     | 136        |
| 4.2.1    | Exemple 1 . . . . .  | 137        |
| 4.2.2    | Exemple 2 . . . . .  | 137        |
| 4.2.3    | Exemple 3 . . . . .  | 138        |
| 4.2.4    | Exemple 4 (Cas général) . . . . .                            | 138        |
| 4.3      | Majorations de l'erreur . . . . .                            | 142        |
| 4.3.1    | On interpole par un polynôme de degré 1 . . . . .            | 142        |
| 4.3.2    | On interpole par un polynôme de degré 2 . . . . .            | 149        |
| 4.3.3    | On interpole par un polynôme de degré $k$ . . . . .          | 151        |
| 4.4      | Exercices . . . . .  | 151        |
| 4.5      | Corrigés . . . . .   | 153        |
| <b>5</b> | <b>Introduction des éléments finis en dimension 2</b>        | <b>175</b> |
| 5.1      | Triangulation du domaine . . . . .                           | 175        |
| 5.1.1    | Valeurs aux sommets . . . . .                                | 176        |
| 5.1.2    | Coordonnées barycentriques . . . . .                         | 177        |
| 5.2      | Approximation de la solution . . . . .                       | 178        |
| 5.2.1    | Espace d'approximation . . . . .                             | 178        |
| 5.2.2    | Base de $V_h$ . . . . .                                      | 178        |
| 5.2.3    | Solution approchée . . . . .                                 | 179        |
| 5.2.4    | Numérotation de la triangulation . . . . .                   | 180        |
| 5.2.5    | Exemples de triangles de mauvaise qualité . . . . .          | 182        |
| 5.3      | Majorations de l'erreur . . . . .                            | 182        |
| 5.3.1    | Triangle de référence $\hat{T}$ . . . . .                    | 183        |
| 5.4      | Monter en degré $P_2$ . . . . .                              | 186        |
| 5.4.1    | Unicité du polynôme pour un triangle à 6 nœuds . . . . .     | 187        |
| 5.4.2    | Coordonnées barycentrique . . . . .                          | 189        |
| 5.4.3    | Erreurs avec le triangle à 6 nœuds . . . . .                 | 190        |
| 5.5      | Domaine non polygonal . . . . .                              | 192        |
| 5.5.1    | Domaine et domaine approché . . . . .                        | 192        |
| 5.5.2    | Erreur entre solution exacte et solution approchée . . . . . | 199        |
| 5.5.3    | Éléments à frontières courbes . . . . .                      | 202        |
| 5.6      | Cas conforme : procédé de dualité d'Aubin Nitsche . . . . .  | 205        |
| 5.7      | Éléments rectangulaires . . . . .                            | 207        |
| 5.8      | Exercices . . . . .  | 209        |
| 5.9      | Corrigés . . . . .   | 213        |
| <b>6</b> | <b>Méthodes non conformes</b>                                | <b>223</b> |
| 6.1      | Triangulation du domaine . . . . .                           | 223        |
| 6.1.1    | Numérotation du domaine aux milieux des côtés . . . . .      | 223        |
| 6.1.2    | Valeurs aux milieux des côtés . . . . .                      | 224        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 6.2      | Approximation de la solution . . . . .                                 | 226        |
| 6.2.1    | Espace d'approximation . . . . .                                       | 226        |
| 6.2.2    | Solution approchée . . . . .   | 226        |
| 6.2.3    | Existence et unicité de solution approchée . . . . .                   | 231        |
| 6.2.4    | Majorations de l'erreur . . . . .                                      | 233        |
| 6.3      | Cas non conforme : procédé de dualité d'Aubin Nitsche . . . . .        | 237        |
| 6.4      | Brique de Wilson . . . . .   | 247        |
| 6.4.1    | Éléments rectangulaires . . . . .                                      | 247        |
| 6.4.2    | Problème approché, Patch test pour des mailles rectangulères . . . . . | 252        |
| 6.4.3    | Majorations de l'erreur . . . . .                                      | 254        |
| 6.5      | Élément fini de la famille Serendipity . . . . .                       | 265        |
| 6.6      | Problème de flexion de poutre encastree . . . . .                      | 273        |
| 6.6.1    | Position du problème . . . . .   | 273        |
| 6.6.2    | Existence et unicité de solution . . . . .                             | 274        |
| 6.6.3    | Problème approché . . . . .  | 276        |
| 6.6.4    | Majorations de l'erreur . . . . .                                      | 278        |
| 6.6.5    | Procédé de dualité d'Aubin Nitsche . . . . .                           | 280        |
| 6.6.6    | Inégalité inverse . . . . .  | 282        |
| <b>7</b> | <b>Méthodes nodales</b>  | <b>285</b> |
| 7.1      | Méthode nodale pour les carrés ou rectangles . . . . .                 | 285        |
| 7.1.1    | Position du problème . . . . .   | 285        |
| 7.1.2    | Élément de référence . . . . .   | 286        |
| 7.1.3    | fonctions de base . . . . .  | 287        |
| 7.1.4    | Description de la méthode nodale . . . . .                             | 290        |
| 7.1.5    | Relation entre méthode nodale et méthode non conforme . . . . .        | 291        |
| 7.1.6    | Existence et unicité de solution . . . . .                             | 296        |
| 7.1.7    | Majorations de l'erreur pour la méthode non conforme . . . . .         | 296        |
| 7.2      | Méthode nodale sur les triangles . . . . .                             | 307        |
| 7.2.1    | Éléments de base . . . . .   | 307        |
| 7.2.2    | Description de la méthode nodale sur les triangles . . . . .           | 312        |
| 7.2.3    | Coordonnées barycentriques . . . . .                                   | 316        |
| <b>8</b> | <b>Systèmes du premier ordre symétriques positifs</b>                  |            |
|          | <b>au sens de Friedrichs</b>   | <b>323</b> |
| 8.1      | Exemple . . . . .  | 323        |
| 8.1.1    | En dimension 1 . . . . .   | 324        |
| 8.1.2    | En dimension 2 . . . . .   | 326        |
| 8.1.3    | La pénalisation . . . . .  | 327        |
| 8.2      | Autre problème . . . . .   | 330        |
| 8.3      | Changement en système de premier ordre . . . . .                       | 332        |
| 8.3.1    | Exemple en dimension 1 . . . . .                                       | 333        |
| 8.3.2    | Exemple en dimension 2 . . . . .                                       | 333        |

---

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 8.3.3     | Équation des ondes en dimension 1 . . . . .      | 334        |
| 8.4       | Système de premier ordre . . . . .               | 335        |
| 8.4.1     | Formule de Green . . . . .                       | 336        |
| 8.4.2     | Conditions aux limites . . . . .                 | 342        |
| 8.4.3     | Exemples . . . . .                               | 345        |
| 8.5       | Équation de la chaleur . . . . .                 | 370        |
| 8.6       | Équation des ondes . . . . .                     | 374        |
| 8.7       | Équation de transport . . . . .                  | 379        |
| <b>9</b>  | <b>Approximation des systèmes de Friedrichs</b>  |            |
|           | <b>par des méthodes d'éléments finis</b>         | <b>383</b> |
| 9.1       | Exemples . . . . .                               | 383        |
| 9.2       | Majorations de l'erreur . . . . .                | 391        |
| 9.3       | Méthodes d'éléments finis continus . . . . .     | 395        |
| 9.4       | Méthode des éléments finis discontinus . . . . . | 401        |
| 9.4.1     | Majorations de l'erreur . . . . .                | 405        |
| <b>10</b> | <b>Problèmes de révision</b>                     | <b>409</b> |
| 10.1      | Exercices et problèmes . . . . .                 | 409        |
| 10.2      | Problèmes et examens . . . . .                   | 428        |
|           | <b>Bibliographie</b>                             | <b>439</b> |
|           | <b>Index</b>                                     | <b>443</b> |