

Jean Franchini
Jean-Claude Jacquens

MATHS

Cours

Exercices et travaux dirigés corrigés

PSI-PSI*

NOUVEAUX
PROGRAMMES !

ellipses

Table des matières

1. COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE	1
I. Produit et somme	1
A. Produit	1
B. Sommes	2
C. Décomposition en somme directe	4
II. Matrices et endomorphismes	5
A. Blocs	5
B. Polynômes d'endomorphisme	8
C. Trace	11
D. Interpolation de Lagrange	12
Exercices	14
Travaux dirigés	32
Noyaux itérés	32
Commutateurs	35
Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$	36
Splines cubiques	39
2. RÉDUCTION	41
I. Éléments propres	41
A. Cas d'un endomorphisme	41
B. Cas d'une matrice	43
C. Polynôme caractéristique	44
II. Réduction en dimension finie	48
A. Endomorphisme diagonalisable	48
B. Matrice diagonalisable	50
C. Utilisations de la diagonalisation	51
D. Trigonalisation	52
Exercices	54
Travaux dirigés	65
Convergence de (A^m)	65
Projecteurs spectraux	66
Problème de Dirichlet discret	68
Endomorphismes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ conservant le rang (classes *)	71
Produit tensoriel	75

3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	77
I. Normes, distances et convergences	77
A. Définitions	77
B. Exemples fondamentaux	79
C. Applications lipschitziennes	81
D. Suites	82
E. Comparaison des normes	84
II. Topologie et fonctions	85
A. Point intérieur, partie ouverte	85
B. Point adhérent, partie fermée	86
C. Topologie et normes équivalentes	87
D. Limite et continuité	87
III. Cas de la dimension finie	91
A. Équivalence des normes	91
B. Suites	91
C. Applications linéaires ou multilinéaires	92
Exercices	93
Travaux dirigés	102
Intersection de boules fermées	102
Distance d'un point à une partie	103
Commutant d'une matrice	104
4. SUITES ET SÉRIES	107
I. Séries numériques	107
A. Comparaison à une intégrale	107
B. Règle de d'Alembert	108
C. Formule de Stirling	109
D. Théorème spécial des séries alternées	110
E. Produit de Cauchy	112
II. Suites et séries de fonctions	113
A. Modes de convergence	113
B. Régularité de la limite	118
III. Séries entières	122
A. Rayon de convergence	122
B. Régularité de la somme	125
C. Fonctions développables en série entière	126

Exercices	128
Travaux dirigés	150
Sommutation de relations de comparaison	150
Convergence monotone	153
Théorème de Bernstein	154
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	156
5. INTÉGRATION	159
I. Fonctions continues par morceaux	159
A. Généralités	159
B. Intégrale sur un segment	160
II. Intégrales généralisées	161
A. Convergence, absolue convergence	161
B. Intégrabilité	163
C. Calcul effectif	165
III. Suites et séries de fonctions intégrables	166
A. Théorème de convergence dominée	166
B. Intégration terme à terme	167
C. Utilisation des deux théorèmes dans le cas positif	168
IV. Intégrales à paramètre	168
A. Continuité	168
B. Classe C^k	169
C. Exemple de la fonction Γ	170
Exercices	171
Travaux dirigés	189
Transformation de Laplace	189
Application de la transformation de Laplace à un système différentiel	192
Formule de Stirling	193
Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt$	194
Fonction définie par une intégrale	196
Intégration des relations de comparaison	198
6. ESPACES PRÉHILBERTIENS	201
I. Structure préhilbertienne	201
A. Produit scalaire	201
B. Orthogonalité	203
C. Bases orthonormées d'un espace euclidien	206
D. Projection orthogonale	207
E. Formes linéaires et hyperplans	209
II. Isométries d'un espace euclidien	210
A. Isométries et groupe orthogonal	210
B. Matrices orthogonales	211
C. Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3	212

D. Groupe $O(2)$	215
E. Groupe $SO(3)$	216
III. Endomorphismes autoadjoints	217
A. Généralités	217
B. Stabilités	218
C. Théorème spectral	218
D. Endomorphismes autoadjoints positifs	220
Exercices	220
Travaux dirigés	236
Caractérisations des espaces euclidiens	236
Matrices symétriques positives	238
Polynômes orthogonaux ; généralités	240
Polynômes de Legendre	244
Polynômes de Tchebychev de première espèce	247
Déterminant de Gram	249
Optimisation d'une forme quadratique	252
Endomorphismes antisymétriques	254
7. PROBABILITÉS	257
I. Espaces probabilisés	257
A. Ensembles dénombrables, familles sommables	257
B. Espaces probabilisés	259
C. Conditionnement et indépendance	262
II. Variables aléatoires discrètes	264
A. Variable discrète et loi	264
B. Couple de variables aléatoires	265
C. Lois discrètes usuelles	268
D. Moments d'une variable aléatoire	271
E. Fonctions génératrices	278
Exercices	280
Travaux dirigés	289
Autour des records	289
Somme de variables aléatoires	293
8. CALCUL DIFFÉRENTIEL	297
I. Équations différentielles linéaires scalaires	297
A. Vocabulaire	297
B. Théorème de Cauchy linéaire	297
C. Ensemble des solutions de l'équation homogène	298
D. Méthodes particulières	298

II. Dérivabilité des fonctions vectorielles	299
A. Généralités	300
B. Opérations	301
C. Classe \mathcal{C}^k	303
III. Fonctions de plusieurs variables	305
A. Ordre 1	305
B. Ordre 2	311
Exercices	315
Travaux dirigés	327
Lemme de Gronwall ; applications	327
Wronskien et entrelacement de Sturm	329
Compacts admissibles de \mathbb{C}	332
Approximation de la dérivée n -ième	334
Équations aux dérivées partielles	338
Équation de la chaleur	341
Annexe : structures et morphismes	345
Index	349