

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	7
Introduction : Potentiels et horizons	9
1 Michel Parreau, mathématicien	9
2 Riemann et ses surfaces	11
3 Classifications, discriminations	16
4 Construire des mondes est un jeu d'enfant	32
5 Intermède	34
6 Forme de l'univers, cosmo(géo)métries et cosmophysiques . . .	35
7 Michel Parreau et l'autonomisation du travail mathématique .	37
8 Physique fictive sur les surfaces de Riemann	39
9 Parreau à l'horizon par procuration	45
10 Lectures de Michel Parreau	51
11 L'affaire "Parreau"	59

ÉCRITS MATHÉMATIQUES DE MICHEL PARREAU 79

I	THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES	81
1	Introduction : compléments de topologie et d'analyse	83
1.1	Connexion	83
1.1.1	Définitions et propriétés générales	83
1.1.2	Composantes connexes	84
1.1.3	Ensembles connexes de \mathbf{R}	85
1.1.4	Ouverts connexes de \mathbf{R}^n	85
1.2	Arcs rectifiables	86
1.2.1	Arcs paramétrés	86
1.2.2	Arcs rectifiables	87
1.2.3	Abscisse curviligne	87
1.2.4	Arcs continûment différentiables.	87
1.2.5	Arcs rectifiables dans \mathbf{R}^n	88
1.3	Intégrales curvilignes	88
1.3.1	Intégrales de Stieltjes	88
1.3.2	Intégrales curvilignes	89
1.3.3	Propriétés des intégrales curvilignes	90
1.3.4	Cas d'une courbe fermée	91
2	Nombres complexes. Fonctions élémentaires d'une variable complexe	93
2.1	Nombres complexes	93
2.1.1	Définition des nombres complexes	93
2.1.2	Nombres complexes conjugués. Module	94
2.1.3	Représentation géométrique des nombres complexes	95
2.1.4	Angles	96
2.1.5	Mesure des angles. Argument	97
2.1.6	Corps projectif $\tilde{\mathbf{C}}$. Sphère de Riemann	100

2.2	Fonctions rationnelles d'une variable complexe	101
2.2.1	Fonctions linéaires	101
2.2.2	Fonctions homographiques	101
2.3	Fonction exponentielle et fonctions transcendantes qui s'en dé- duisent	107
2.3.1	Fonction exponentielle	107
2.3.2	Fonctions hyperboliques et trigonométriques	108
2.4	Fonctions réciproques des fonctions usuelles	109
2.4.1	Premières notions sur les fonctions multiformes	109
2.4.2	Fonction logarithme	109
2.4.3	Fonction puissance	110
2.4.4	Fonctions trigonométriques inverses	110
3	Fonctions holomorphes	111
3.1	Holomorphie en un point. Conditions de Cauchy-Riemann	111
3.1.1	Holomorphie en un point	111
3.1.2	Conditions de Cauchy-Riemann	112
3.1.3	Fonctions holomorphes dans un domaine	113
3.1.4	Holomorphie à l'infini. Fonctions méromorphes	114
3.2	Représentation conforme locale	115
3.2.1	Conservation des angles orientés dans une transforma- tion holomorphe	115
3.2.2	Réciproque	116
3.2.3	Dilatation en un point	116
3.3	Séries entières	116
3.3.1	Holomorphie de la somme d'une série entière	116
3.3.2	Formule de Taylor	117
3.3.3	Application à la fonction exponentielle et aux fonctions qui s'en déduisent	118

4	Théorème et formule de Cauchy. Singularités isolées des fonctions analytiques. Calcul des résidus	121
4.1	Différentielles exactes ; différentielles localement exactes	121
4.1.1	Intégrales curvilignes dans \mathbf{C}	121
4.1.2	Différentielles exactes	122
4.1.3	Différentielles localement exactes	124
4.1.4	Condition nécessaire et suffisante d'exactitude locale, dans le cas où p et q sont continûment différentiables	125
4.2	Homologie. Ordre de connexion	126
4.2.1	Chaînes. Cycles	126
4.2.2	Indice d'un cycle par rapport à un point	127
4.2.3	Cycles homologues à zéro. Homologie	129
4.2.4	Domaines simplement connexes. Ordre de connexion	131
4.2.5	Courbes de Jordan. Bord orienté d'un domaine relativement compact	133
4.3	Formule de Cauchy. Applications	135
4.3.1	Théorème de Cauchy-Goursat	135
4.3.2	Formule de Cauchy	137
4.3.3	Analyticité des fonctions holomorphes	138
4.3.4	Théorème de Morera	139
4.3.5	Isolement des zéros d'une fonction holomorphe	139
4.3.6	Branches uniformes de $\log f(z)$ et de $(f(z))^\alpha$	141
4.3.7	Inégalités de Cauchy. Théorème de Liouville	141
4.3.8	Principe du maximum	142
4.3.9	Lemme de Schwarz	143
4.4	Singularités isolées des fonctions holomorphes. Théorème des résidus	144
4.4.1	Points singuliers isolés. Série de Laurent	144
4.4.2	Classification des points singuliers isolés	146
4.4.3	Théorème des résidus	148
4.4.4	Résidu à l'infini	149
4.5	Étude locale des fonctions holomorphes ou méromorphes	151

4.5.1	Principe de la variation de l'argument	151
4.5.2	Cas où γ est le bord orienté d'un domaine	152
4.5.3	Propriétés locales des fonctions holomorphes ou méromorphes	153
4.6	Application du théorème des résidus au calcul de certaines intégrales définies	155
4.6.1	Remarques générales	155
4.6.2	Calcul d'une intégrale du type $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$, où R est une fraction rationnelle	157
4.6.3	Calcul d'une intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, où f est une fraction rationnelle n'ayant aucun pôle réel	157
4.6.4	Calcul des intégrales du type $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} dx$, où a est un nombre réel > 0 , et R une fraction rationnelle nulle à l'infini et n'ayant pas de pôle réel	158
4.6.5	Cas où f a des pôles simples sur l'axe réel	159
4.6.6	Calcul des intégrales du type $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} R(x) dx$, où α est un nombre réel compris entre 0 et 1, et R une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle réel positif	161
4.6.7	Calcul des intégrales du type $\int_0^{+\infty} \log x R(x) dx$, où R est une fraction rationnelle n'ayant aucun pôle réel positif	162
5	Familles de fonctions holomorphes. Représentation des fonctions entières et des fonctions méromorphes dans \mathbb{C}. Théorème de Riemann	165
5.1	Familles de fonctions holomorphes	165
5.1.1	Théorème de Weierstrass	165
5.1.2	Théorème de Hurwitz	166
5.1.3	Fonctions holomorphes définies par une intégrale	167
5.2	Représentation des fonctions méromorphes dans \mathbb{C}	169
5.2.1	Théorème de Mittag-Leffler	169
5.2.2	Représentation des fonctions méromorphes	171
5.2.3	Fonction $\frac{1}{\sin^2 z}$	171
5.2.4	Fonction $\cot g z$	172
5.2.5	Fonction $\frac{1}{\sin z}$	173

5.2.6	Fonctions doublement périodiques	174
5.2.7	Fonction $\wp(z)$	176
5.3	Représentation des fonctions holomorphes	178
5.3.1	Décomposition d'une fonction entière en un produit de facteurs primaires	178
5.3.2	Ordre d'une fonction entière. Théorème de Hadamard-Borel	180
5.3.3	Représentation des fonctions entières d'ordre fini	181
5.3.4	Exemple : développement eulérien de $\sin z$	184
5.3.5	Fonction gamma	184
5.4	Familles normales. Théorèmes d'Ascoli et de Montel	187
5.4.1	Convergence compacte dans un espace localement compact dénombrable à l'infini	187
5.4.2	Théorème d'Ascoli	189
5.4.3	Théorèmes de Montel et de Stieltjes-Vitali	190
5.5	Représentation conforme simple. Théorème de Riemann	191
5.5.1	Fonctions univalentes ; transformations conformes simples	191
5.5.2	Suites de fonctions univalentes	193
5.5.3	Représentation conforme des domaines simplement connexes	193
5.5.4	Représentation conforme simple de \mathbf{C} ou $\tilde{\mathbf{C}}$ sur lui-même	195
5.6	Fonctions harmoniques. Formule de Poisson	195
5.6.1	Fonctions harmoniques	195
5.6.2	Propriété de moyenne ; principe du maximum	197
5.6.3	Formule de Poisson	198
5.6.4	Problème de Dirichlet	199
5.6.5	Applications de la formule de Poisson	200

II REPRÉSENTATIONS CONFORMES DES SURFACES DE RIEMANN PLANES 203

Représentations des surfaces de Riemann	207
1 Calcul différentiel sur les surfaces de Riemann	207
1.1 Surfaces de Riemann	207
1.2 Formes différentielles sur une surface de Riemann . . .	207
1.3 Opérations, différentiation, forme adjointe	208
1.4 Formes fermées, cofermées, exactes, harmoniques, ana- lytiques	209
1.5 Intégration	209
2 Espace de Hilbert des différentielles de carré intégrable. Dé- composition de de Rham	210
2.1 Différentielles de carré intégrable	210
2.2 Lemme de Weyl. Décomposition de de Rham	211
3 Construction de formes différentielles harmoniques et ana- lytiques ayant des singularités et un comportement à la frontière imposés	213
3.1 Différentielles avec singularités	213
3.2 Théorème d'existence	214
3.3 Différentielles analytiques associées à ω	216
3.4 Propriétés extrémales de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (cas plan)	217
3.5 Convergence de α et β dans l'approximation de S par des ouverts connexes régulièrement immergés	219
4 Représentation conforme d'une surface de Riemann plane S sur des domaines à fentes parallèles	220
4.1 Représentation conforme de S sur un domaine à fentes horizontales	220
4.2 Propriété extrémale de la fonction w	221
4.3 Autre démonstration du théorème 1	222
4.4 Représentation conforme de S sur des domaines à fentes parallèles	223
4.5 Fonction $\frac{1}{2}(w_0 + w_{\pi/2})$	224
4.6 Classe 0_{AD}	225

5	Fentes circulaires et radiales	226
5.1	Représentation conforme d'une surface de Riemann plane S sur un ouvert de \tilde{C} limité par des fentes circulaires ou radiales	226
5.2	Représentation sur un disque, muni de fentes circulaires ou radiales	228
5.3	Représentation sur une couronne munie de fentes circulaires	231
6	Représentation conforme d'une surface de Riemann plane de connexion finie sur un ouvert limité par des cercles	232

III THÉORÈME DE FATOU ET PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES LIGNES DE GREEN DE CERTAINES SURFACES DE RIEMANN 237

	Théorème de Fatou et problème de Dirichlet	241
1	Représentation d'une surface de Riemann régulière sur un disque fendu	242
2	Extension du théorème de Fatou	243
3	Problème de Dirichlet	243
4	Fonctions de caractéristique bornée	245

POSTFACE 249

	Michel Parreau : un itinéraire	251
1	La réussite d'un jeune d'origine modeste, très politisé	251
2	« Le plus jeune doyen de France »	254
3	La Cité scientifique et les « événements de mai 1968 »	256
4	L'après 68 : le combat continue !	259
5	L'ALIAS et le Centre régional de culture scientifique	262
6	L'université du Littoral	264